INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

IE2 - S2 - Correction

<table>
<tr><td colspan="3">Exercice 1 : ski de vitesse - 8 points.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Éléments de correction, attendus et barème</td></tr>
<tr><td>

1. On étudie le système skieur et équipement dans le référentiel terrestre supposé galiléen auquel on associe le repère (O, x, y) (l'axe Ox parallèle à la piste AB et dirigé vers le bas et l'axe Oy perpendiculaire à la piste et dirigé vers le haut). Les forces extérieures exercées sur le système sont (on néglige les frottements de l'air et la poussée d'Archimède) :

   - Le poids $\vec{P}$.
   - La réaction du support $\vec{R}$; avec : $\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_T$

   D'après le PFD : $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$; soit en projetant dans le repère (O, x, y)
   $$\begin{cases} m\ddot{x} = mgs\sin(\alpha) - R_T \\ m\ddot{y} = -mg\cos(\alpha) + R_N \end{cases}$$
   Or : $\ddot{y} = 0$ car le skieur reste sur la piste et : $R_T = \mu R_N$; d'où :
   $$\begin{cases} m\ddot{x} = mg\sin(\alpha) - \mu R_N \\ R_N = mg\cos(\alpha) \end{cases} \text{ ; donc : } \begin{cases} \ddot{x} = g[\sin(\alpha) - \mu\cos(\alpha)] \\ R_N = mg\cos(\alpha) \end{cases}$$
   Par intégration de l'accélération (qui est constante) et en tenant compte des conditions imposées par l'énoncé : $v_A = v_B - g[\sin(\alpha) - \mu\cos(\alpha)] \times t_B$

   <u>**AN**</u> : $v_A = \frac{200}{3,6} - 9,81[\sin(45) - 0,015\cos(45)] \approx 14,6$ m·s^{-1} $\approx 52,4$ km·h^{-1}

</td><td>

0,5 point pour le système, le référentiel, le repère et le bilan des forces.

0,5 point pour le schéma des forces.

1 point pour le PFD projeté sur les axes.

0,5 point pour l'expression de v_A.

0,5 point pour l'application numérique.

</td><td>/3</td></tr>
<tr><td>

2. Dans le bilan des forces de la partie précédente on rajoute la force de frottement de l'air dont l'expression est : $\vec{f} = -k\vec{v}$. Le PFD projeté dans le repère $(0, x', y')$ dont l'axe Ox' est parallèle à la piste BC et Oy' perpendiculaire à Ox', donne :
   $$\begin{cases} m\ddot{x'} = mg\sin(\beta) - R_T - k\dot{x'} \\ m\ddot{y'} = -mg\cos(\beta) + R_N = 0 \end{cases}$$
   soit en combinant les deux relations et avec : $\dot{x'} = v$ (la composante et la norme sont identiques car : $\dot{y'} = 0$ et : $\dot{x'} = \|\vec{v}\| = v$) :
   $$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g[\sin(\beta) - \mu\cos(\beta)]$$
   <u>Remarque</u> : par souci de simplification, il n'est pas tenu compte de la continuité du vecteur vitesse dans le corrigé (vitesse initiale en B uniquement selon (Ox'). La prise en compte de cette discontinuité supposerait de prendre une vitesse initiale selon (Ox') et $(0y')$.

</td><td>

0,5 point pour l'expression de $\vec{f}$.

1 point pour l'équation différentielle (valoriser par un bonus de 1 point la prise en compte de la continuité de la vitesse en B).

</td><td>/1,5</td></tr>
<tr><td>

3. La solution de cette équation différentielle est la somme de la solution de l'équation homogène associée $v_H(t)$ et d'une solution particulière $v_P(t)$:

   - $v_H(t) = Ae^{-\frac{k}{m}t}$; avec A une constante.
   - $v_P(t) = \frac{mg}{k}[sin(\beta) - \mu cos(\beta)]$

   Déterminons la constante A, sachant qu'à t égal à 0 $v(t = 0) = v_B$ (on fixe l'origine des temps en B) :
   $$v(t = 0) = A + \frac{mg}{k}[\sin(\beta) - \mu\cos(\beta)] = v_B \text{ ; d'où :}$$
   $$v(t) = \{v_B - \frac{mg}{k}[\sin(\beta) - \mu\cos(\beta)]\}e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}[\sin(\beta) - \mu\cos(\beta)]$$

</td><td>

1,5 points pour l'expression de la solution.

0,5 point pour la détermination de la constante d'intégration A.

</td><td>/2</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>4. Le temps de passage t_C au point C est donné par la relation :
$$t_C = t_B + t_{BC} \text{ ; avec : } t_{BC} = -\frac{m}{k} ln \left\{ \frac{v_C - \frac{mg}{k}[\sin(\beta) - \mu\cos(\beta)]}{v_B - \frac{mg}{k}[\sin(\beta) - \mu\cos(\beta)]} \right\}$$
<u>AN</u> : $t_C = 6 + 10,3 = 16,3$ s</td><td>1 point l'expression de t_C.

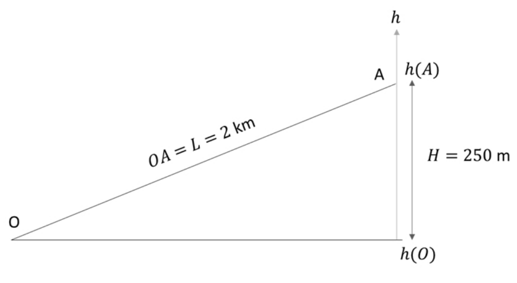
0,5 point pour l'application numérique.</td><td>/1,5</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">Exercice 2 : balançoire - 7,5 points et 1 point de bonus.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Éléments de correction, attendus et barème</td></tr>
<tr><td>1. On étudie le système S barre et enfants dans le référentiel terrestre supposé galiléen auquel on associe le repère (O', x, y, z). Les actions mécaniques extérieures exercées sur le système sont (on néglige les frottements de l'air et la poussée d'Archimède) :

- Le poids $\vec{P}_S$ de S : $\vec{P}_S = \vec{P}_A + \vec{P}_B + \vec{P}_{Barre} = (M + 2m)\vec{g} = -(M + 2m)\vec{u}_y$, dont le moment par rapport à l'axe $(O'z)$ est nul :
$$M(\vec{P}_S)_{O'z} = \frac{mgL\cos(\alpha)}{2} + 0 - \frac{mgL\cos(\alpha)}{2} = 0$$
(le poids de la barre s'applique en O' son milieu puisqu'elle est homogène et les poids des enfants en A et B).
- La force de rappel exercée par le ressort en C : $\vec{F}_C = -ky_C\vec{u}_y$, dont le moment par rapport à l'axe $(O'z)$ vaut : $M(\vec{F}_C)_{O'z} = +ky_C D$
- La force de rappel exercée par le ressort en C' : $\vec{F}_{C'} = -ky_{C'}\vec{u}_y$, dont le moment par rapport à l'axe $(O'z)$ vaut : $M(\vec{F}_{C'})_{O'z} = -ky_{C'} D$
- La réaction l'axe en O' : $\vec{R} = \|\vec{R}\|\vec{u}_y$ (car toutes les forces ont une direction verticale) et : $M(\vec{R})_{O'z} = 0$.</td><td>0,5 point pour le système, le référentiel, le repère et le schéma.

0,5 point pour chaque expression de la force et de son moment.</td><td>/2,5</td></tr>
<tr><td>2. Les ressorts étant identiques et placés à la même distance de part et d'autre de O', on a : $y_C = -y_{C'} = y$; soit : $\vec{F}_C + \vec{F}_{C'} = \vec{0}$ et : $M(\vec{F}_C)_{O'z} + M(\vec{F}_{C'})_{O'z} = -2kyD = -2kD^2\tan(\theta)$, ce qui correspond bien à la définition d'un couple de force (la somme des forces est égal au vecteur nul alors que la somme des moments ne l'est pas).</td><td>0,5 point pour la relation : $y_C = -y_{C'}$.
0,5 point pour la somme des forces.
0,5 point pour l'expression du moment du couple (accepter : $y = D\sin(\theta)$ car aux petits angles on peut considéré aussi que $D = O'C'$.</td><td>/1,5</td></tr>
<tr><td>3. $J = J_A + J_B + J_{Barre}$; avec : $J_A = J_B = m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{mL^2}{4}$ et : $J_{Barre} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} r^2 \lambda dr = \frac{ML^2}{12}$
(avec : $M = \lambda L$)</td><td>0,5 point pour l'expression de $J_A + J_B$.
0,5 point pour l'expression de J_{Barre}.</td><td>/1</td></tr>
</table>

4. D'après le TMC : $J\ddot{\theta} = \sum M(\vec{F}_{Ext/S})_{O'z}$; soit d'après les questions 1 et 2 : $J\ddot{\theta} = -2kD^2\tan(\theta)$; donc : $\ddot{\theta} + \frac{2kD^2}{J}\tan(\theta) = 0$. Comme l'amplitude initiale θ_0 est petit, les oscillations seront de faible amplitude, d'où : $\tan(\theta) \approx \theta$; l'équation du mouvement pour des petits angles est donc : $\ddot{\theta} + \frac{2kD^2}{J}\theta = 0$	0,5 pour l'énoncé du TMC. 0,5 pour l'approximation des petits angles. 0,5 pour l'équation du mouvement.	/1,5
5. On pose : $\omega_0 = \frac{2kD^2}{J}$. La solution de l'équation différentielle est de la forme : $\theta(t) = (\omega_0 t + \phi)$. D'après les conditions initiales : $\theta(t=0) = \theta_0$ rad et : $\dot{\theta}(t=0) = 0$ rad·s^{-1} ; on a : $Acos(\phi) = \theta_0$ et : $-\omega_0 Asin(\phi) = 0$. On choisit : $\phi = 0$; donc : $\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t)$ avec : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{D}\sqrt{\frac{J}{2k}}$ la période des oscillations libres.	0,5 point la forme de la solution. 0,5 point pour l'expression de T_0. 0,5 point de bonus pour la déterminations des constantes A et ϕ. 0,5 point de bonus pour la vérification de l'homogénéité de T_0	/1 Bonus /1

Exercice 3 : le gyrobus - 4,5 points.		
Éléments de correction, attendus et barème		
On cherche à déterminer l'énergie mécanique E_M suffisante pour que le système bus de masse M égale à 10 tonnes puisse gravir une côte de longueur : $L = OA$, de dénivelé : $H = h(A) - h(O) = 150$ m, avec une vitesse initiale v_O nulle en O et une vitesse v_A de 50 km·h^{-1} au sommet A.  	Identification des grandeurs avec un schéma.	/0,5
D'après le TEM entre le point de départ O et le sommet A : $\Delta E_M(O \to A) = W_{O\to A}(\vec{f}_{nc})$	Utilisation et la formulation (correctes) d'un théorème énergétique.	/0,5
L'énergie mécanique E_M du bus se compose de : - L'énergie cinétique de rotation du volant d'inertie : $\epsilon_c = \frac{1}{2}J\omega^2$; avec J le moment d'inertie du volant et ω sa vitesse angulaire de rotation. - L'énergie cinétique de translation du bus : $E_c = \frac{1}{2}Mv^2$; avec v la vitesse du bus. - L'énergie potentielle de pesanteur du bus par rapport au niveau de référence situé en 0 ($E_{PP}(O) = 0$ J) : $E_{PP} = MgH$. Le travail W des forces de frottement qui est la seule force non conservative : $f = 0{,}4$ kWh ·km^{-1}	Citer les énergies entrant en jeu en donnant leur expression, ainsi que l'expression du travail des forces de frottement .	/1

L'objectif est de déterminer l'énergie initiale de rotation $\epsilon_c(O)$ et donc la vitesse angulaire ω_0 en O de rotation du volant d'inertie suffisante pour atteindre le sommet avec la vitesse v_A.	Reformulation du problème.	/0,5
On peut donc écrire : $$\Delta E_M(O \rightarrow A) = \Delta\epsilon_c(O \rightarrow A) + \Delta E_c(O \rightarrow A) + \Delta E_{PP}(O \rightarrow A)$$ $$= \frac{1}{2}J\left(\omega_A^2 - \omega_0^2\right) + \frac{1}{2}M\left(v_A^2 - v_0^2\right) + Mg\left[h(A) - h(O)\right] = -\frac{1}{2}J\omega_0^2 + \frac{1}{2}Mv_A^2 + mgH$$ en supposant que toute l'énergie cinétique de rotation a été consommée à la fin du trajet en A. Le travail des forces de frottement vaut : $W = -fL$ (< 0 car ce travail est résistant). On obtient donc : $\frac{1}{2}J\omega_0^2 = \frac{1}{2}Mv_A^2 + MgH + fL$; soit : $\omega_0 = \sqrt{\frac{Mv_A^2 + 2MgH + 2fL}{J}}$ **<u>AN</u>** : $\omega_0 = \sqrt{\frac{10\times10^3\times(\frac{50}{3,6})^2 + 2\times10\times10^3\times9,81\times150 + 2\times0,4\times3,6\times10^6\times2}{750}} \approx 222,5\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$; soit environ : $\frac{222,5\times60}{2\pi} \approx 2124\ \text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$	1 point pour les expressions des énergies et du travail W. 0,5 point pour l'expression littérale de ω_0. 0,5 point pour l'application numérique.	/2