INSA Institut National des Sciences Appliquées Lyon

FIMI 1A - filière classique
2018-2019

OMSI - Corrigé de l'interrogation de fin de semestre

7 juin 2019 **Durée : 2 h 00**

Exercice 1

1.	En bleu sur la figure.	0,25
2. (a)	$\overrightarrow{F_1}(0,1) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{F_1}(0,-1) = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. En vert sur la figure.	0,25
(b)	$\dfrac{\partial y^2}{\partial y} = 2y \neq 0 = \dfrac{\partial y}{\partial x}$. Comme la circulation infinitésimale n'est pas fermée, le champ $\overrightarrow{F_1}$ ne dérive pas d'un potentiel.	0,75
(c)	Sur $\mathcal{P}$, on a $(x(t), y(t)) = (t, t^2-1)$ avec $t \in [-1,1]$ donc $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\overrightarrow{F_1}) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \begin{pmatrix}(t^2-1)^2\\t^2-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\2t\end{pmatrix} \,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} t^4+2t^3-2t^2-2t+1 \,\mathrm{d}t = \frac{2}{5} - \frac{4}{3} + 2 = \frac{16}{15}$ Ou : $y = x^2-1 \Rightarrow \mathrm{d}y = 2x\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}\mathcal{C}_{\mathcal{P}} = y^2\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = (x^4+2x^3-2x^2-2x+1)\,\mathrm{d}x$ $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\overrightarrow{F_1}) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (x^4+2x^3-2x^2-2x+1)\,\mathrm{d}x$	1,25
	Sur $[BC]$, on a $(x(t), y(t)) = (1-t, 0+t)$ avec $t \in [0,1]$ donc $\mathcal{C}_{[BC]}(\overrightarrow{F_1}) = \displaystyle\int_0^1 \begin{pmatrix}t^2\\t\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \,\mathrm{d}t = \int_0^1 t - t^2 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}$ Ou : $y = 1-x \Rightarrow \mathrm{d}y = -\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}\mathcal{C}_{[BC]} = y^2\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = (x^2-x)\,\mathrm{d}x$ $\mathcal{C}_{[BC]}(\overrightarrow{F_1}) = \displaystyle\int_1^0 (x^2-x)\,\mathrm{d}x$	1
	Sur $[CA]$, on a $(x(t), y(t)) = (0-t, 1-t)$ avec $t \in [0,1]$ donc $\mathcal{C}_{[CA]}(\overrightarrow{F_1}) = \displaystyle\int_0^1 \begin{pmatrix}(1-t)^2\\1-t\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} \,\mathrm{d}t = \int_0^1 -(1-t)-(1-t)^2 \,\mathrm{d}t = -\frac{5}{6}$ Ou : $y = 1+x \Rightarrow \mathrm{d}y = \,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}\mathcal{C}_{[CA]} = y^2\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = (2+3x+x^2)\,\mathrm{d}x$ $\mathcal{C}_{[CA]}(\overrightarrow{F_1}) = \displaystyle\int_0^{-1} (2+3x+x^2)\,\mathrm{d}x$	1
	Ainsi, $\mathcal{C}_{\Gamma}(\overrightarrow{F_1}) = \dfrac{2}{5}$.	0,25

(d)	Sous forme paramétrée, l'équation de la ligne de champs est $y^2y' - yx' = 0$.	0,25
	Sur l'axe Ox, le champs est nul. En dehors de Ox, $y(t) \neq 0$ et ainsi $x' = yy'$. Ce qui se primitive en $x = \dfrac{y^2}{2} + k$ où k est une constante.	
	Comme le champs fuit l'axe Ox, les lignes de champ sont donc des demi-paraboles horizontales sur lesquelles y est de signe constant.	0,5
	<u>Ou</u> : $\begin{cases} \mathrm{d}x = \lambda y^2 \\ \mathrm{d}y = \lambda y \\ \mathrm{d}z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \ \mathrm{d}y = \ \mathrm{d}x \\ z = z_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 2x + k, k \in \mathbb{R} \\ z = z_0 \end{cases}$	
	Celle qui passe par $(0, 1)$ a pour équation $x = \dfrac{y^2}{2} - \dfrac{1}{2}$, en rouge sur la figure.	0,25
3. (a)	Le champ $\overrightarrow{F_2}$ est défini sur $\mathbb{R}^2$ tout entier donc il dérive d'un potentiel ssi sa circulation infinitésimale $y^2dx + y\alpha(x)dy$ est fermée	
	$\Leftrightarrow \dfrac{\partial y^2}{\partial y} = 2y = y\alpha'(x)$ On en déduit que $\alpha(x) = 2x$.	0,5
(b)	$P(x, y) = xy^2$ si $\vec{F_2} = +\overrightarrow{\text{grad}}P$, ou bien $P(x, y) = -xy^2$ si $\vec{F_2} = -\overrightarrow{\text{grad}}P$	0,75
(c)	$\mathcal{C}_{\Gamma'}(\overrightarrow{F_2}) = P(1, 1) - P(-1, -1) = 2$ si $\vec{F_2} = \overrightarrow{\text{grad}}P$ (ou $\mathcal{C}_{\Gamma'}(\overrightarrow{F_2}) = P(-1, -1) - P(1, 1) = 2$ si $\vec{F_2} = -\overrightarrow{\text{grad}}P$)	0,5
4. (a)	$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{e_z}$.	0,25
	Le flux infinitésimal est x^2dxdy. *Remarque* : comme le flux infinitésimal et la surface S sont symétriques par rapport à Oy, le flux est le double du flux à travers la moitié de S pour $x \geqslant 0$	
	Ainsi Flux $= \displaystyle\int_{x=-1}^{0} \int_{x^2-1}^{x+1} x^2 \ \mathrm{d}y \ \mathrm{d}x + \int_{x=0}^{1} \int_{x^2-1}^{1-x} x^2 \ \mathrm{d}y \ \mathrm{d}x = 2 \int_{x=0}^{1} \int_{x^2-1}^{1-x} x^2 \ \mathrm{d}y \ \mathrm{d}x$	
	Calcul correctement posé (avec ou sans symétrie), avec bornes correctes	0,5
	$= 2 \displaystyle\int_{x=0}^{1} x^2(2 - x - x^2) \ \mathrm{d}x = \frac{13}{30}$ Résultat final	0,25
	TOTAL	**8,5**

Exercice 2

1. (a) $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\overrightarrow{e_r} + r\ \mathrm{d}\theta\overrightarrow{e_\theta} + r\sin(\theta)\ \mathrm{d}\varphi\overrightarrow{e_\varphi}$.

   (b) Sous forme paramétrée, on a les équations données par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \pi r\sin(\theta) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} r' \\ r\theta' \\ r\sin(\theta)\varphi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   càd $\begin{cases} \theta' &= 0 \\ \pi r' &= \varphi' \\ \theta' &= 0 \end{cases}$

   On en déduit que pour une ligne de champ, on a : θ constant et $\pi r = \varphi + k$. On obtient ainsi des spirales sur des cônes θ constant, qui s'éloignent de l'origine. Dans le cas, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, on obtient des spirales planes.

2. (a) $\overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r + \pi r^2\sin^2(\theta)\ \mathrm{d}\varphi$.

   (b) On paramétrise le cercle : $r(t) = 1, \theta(t) = \dfrac{\pi}{2}, \varphi(t) = t$ avec $t \in [0, 2\pi]$.

   Et ainsi : $\mathcal{C}(\overrightarrow{F}) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \pi 1^2 \sin^2(\frac{\pi}{2})\ \mathrm{d}t = 2\pi^2$.

   (c) La circulation le long d'une courbe fermée est non nulle donc le champ ne dérive pas d'un potentiel.

3. On considère la surface S, définie en coordonnées cartésiennes, par

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \text{et} \quad -1 \leqslant z\sqrt{2} \leqslant 1\}$$

   (a) $S = \{(r, \theta, \varphi) \,|\, r = 1 \quad \text{et} \quad -1 \leqslant \cos(\theta)\sqrt{2} \leqslant 1\} = \{(r, \theta, \varphi) \,|\, r = 1 \quad \text{et} \quad \dfrac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{3\pi}{4}\}$

   (b) Il s'agit d'une portion de sphère donc $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{e_r}$ ainsi le flux infinitésimal est $\mathrm{d}\Phi = \mathrm{d}S$ et donc

   $\text{Flux} = \displaystyle\iint_S \mathrm{d}S = \int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} 1^2\sin(\theta)\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\varphi = 2\sqrt{2}\pi$

Exercice 3

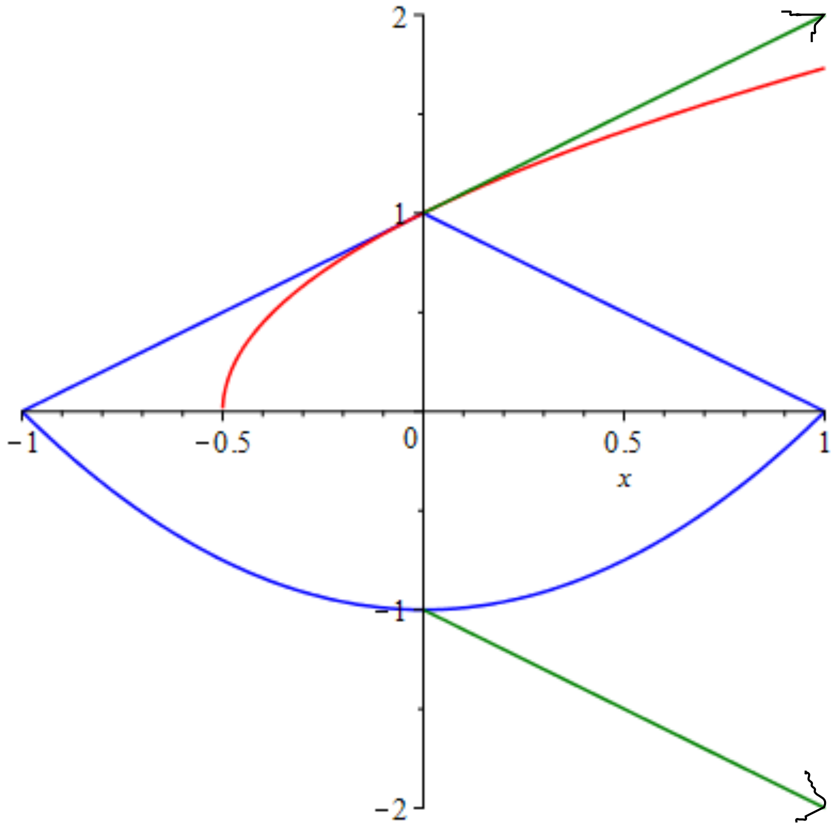
1. On trace $z = \sqrt{x^2 - 9}$ pour $x \in [-5, -3] \cup [3, 5]$.
2. Plusieurs méthodes sont possibles, on donne ici simplement la formule générale. Pour une surface de révolution en cylindrique de la forme $r = r(z)$, on a $\mathrm{d}S = r(z)(\overrightarrow{e_r} - r'(z)\overrightarrow{e_z})\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}z$. Ici $r(z) = \sqrt{9 + z^2}$ et donc $r'(z) = \dfrac{z}{r(z)}$ d'où $\mathrm{d}\overrightarrow{S_R} = \left(\sqrt{9 + z^2}\overrightarrow{e_r} - z\overrightarrow{e_z}\right)\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}z$.
3. (a) On a le flux infinitésimal $\mathrm{d}\Phi = -z^2\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}z$. Et ainsi Flux $= \displaystyle\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{4} -z^2\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}z = -\pi\frac{128}{3}$

   (b) Sur D_0, le champ est nul donc le flux à travers D_0 est nul.
   Sur D_4, $n = \overrightarrow{e_z}$, le flux infinitésimal est constant $\mathrm{d}\Phi = 4\ \mathrm{d}S$ donc le flux est simplement 4 fois l'aire du disque D_4 de rayon $r = 5$ càd 100π
   Et ainsi le flux total est : $\pi\dfrac{172}{3}$.

   (c) Le volume se décrit par $\{(r, \theta, z) | z \in [0, 4], r \in [0, \sqrt{9 + z^2}]\}$ et ainsi :
   $V = \displaystyle\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{4}\int_{r=0}^{\sqrt{9+z^2}} r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}z = 2\pi\int_{z=0}^{4}\frac{9 + z^2}{2}\ \mathrm{d}z = \pi\left[9z + \frac{z^3}{3}\right]_0^4 = \pi\frac{172}{3}$
4. Comme $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_z}$ sont orthogonaux et que $\overrightarrow{e_r} = \cos(\theta)\overrightarrow{e_x} + \sin(\theta)\overrightarrow{e_y}$, on a que le flux infinitésimal $\mathrm{d}\Phi = \cos(\theta)\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}z$.

   Et ainsi Flux $= \displaystyle\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{4}\cos(\theta)\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}z = 0$

Exercice 1



Exercice 3