Nom : **Prénom :** **Groupe :**

Exercice 1 : électricité – un capteur de position (14/40)		/ 14
1. À l'aide d'une loi des mailles ou d'un pont diviseur de tension, on obtient $\underline{u}_1 = e\frac{jL_1\omega}{R+j(L_1+L_2)\omega}$ $\underline{u}_2 = e\frac{jL_2\omega}{R+j(L_1+L_2)\omega}$	1	
2. $\underline{H} = \frac{\underline{u}_2 - \underline{u}_1}{\underline{e}} = \frac{j(L_2-L_1)\omega}{R+j(L_1+L_2)\omega}$ $L_2 - L_1 = 2L_0\frac{\Delta z}{\delta}$ et $L_2 + L_1 = 2L_0$, donc $\underline{H} = 2L_0\frac{\Delta z}{\delta}\frac{j\omega}{R+2jL_0\omega} = 2L_0\frac{\Delta z}{R\delta}\frac{j\omega}{1+j\frac{2L_0}{R}\omega}$ En posant $\omega_0 = \frac{R}{2L_0} \Leftrightarrow R = 2L_0\omega_0$, $\underline{H}$ se réécrit finalement $\underline{H} = \frac{\Delta z}{\delta}\frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}} = H_0\frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$ (où on a bien retrouvé $H_0 = \frac{\Delta z}{\delta}$)	1 0.5	
3. à BF : $\underline{H} \sim H_{as}^0 = H_0\frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1}$ (commencer par chercher H_as avant de calculer module et phase permet d'avoir des calculs plus simples) et $G \to \lvert H_{as}^0\rvert = +H_0\frac{\omega}{\omega_0}$ (puisque $\lvert H_0\rvert = H_0 > 0$ avec $\Delta z > 0$) à HF : $\underline{H} \sim H_{as}^\infty = H_0\frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{j\frac{\omega}{\omega_0}} = H_0$, d'où $G \to H_0$ (puisque $H_0 > 0$ à $\Delta z > 0$) Enfin $G_{dB}^{as0} = 20\log H_0 + 20\log\frac{\omega}{\omega_0}$ et $G_{dB}^{as,\infty} = 20\log H_0$: tracé avec asymptote à BF de pente +20 dB/décade, passant par $20\log H_0$ à $\omega = \omega_0$ et asymptote à HF horizontale à $20\log H_0$	1 0.5	
4. avec $H_0 > 0$ puisque $\Delta z > 0$: à BF, on a trouvé $H_{as}^0 = H_0\frac{j\omega}{\omega_0}$, donc $\varphi \to arg(H_{as}^0) = +\frac{\pi}{2}$ à HF, on a trouvé $H_{as}^\infty = H_0$, d'où $\varphi \to 0$	0.5 0.5	
$\underline{H}(\omega=\omega_0) = H_0\frac{j}{1+j} = H_0\frac{e^{j\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}} = \frac{H_0}{\sqrt{2}}e^{j\frac{\pi}{4}}$, et $\varphi(\omega=\omega_0) = arg(\underline{H})(\omega=\omega_0) = \frac{\pi}{4}$	1	
5. Avec $\Delta z > 0$, on a donc $\varphi = arg(H) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: toujours positif et $u_s(t)$ est toujours en avance sur $u_e(t)$ (la démo $\varphi > 0$ donc en avance n'est pas exigée = mettre un bonus si faite correctement)	1	
6. Si $\Delta z < 0$, alors $\Delta z = -\lvert\Delta z\rvert$. On en déduit plusieurs critères possible pour répondre : par exemple i) $H_{as}^\infty = H_0 = -\frac{\lvert\Delta z\rvert}{\delta}$ et $\varphi \to \pm\pi$: à HF $u_s(t)$ et $u_e(t)$ sont en opposition de phase si $\Delta z < 0$, sinon ils sont en phase ii) $H_{as}^0 = -\frac{\lvert\Delta z\rvert}{\delta}\frac{j\omega}{\omega_0}$ d'où $\varphi \to= -\frac{\pi}{2}$: $u_s(t)$ est en retard sur $u_e(t)$ à BF si $\Delta z < 0$, sinon en avance iii) on trouve finalement $\varphi = arg(H) \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$ avec $\Delta z < 0$: $u_s(t)$ est toujours en retard sur $u_e(t)$ si $\Delta z < 0$, sinon en avance	1	
7. Le max est atteint à HF : $H_{as}^\infty = \lvert H_0\rvert = G_{max}$. On cherche donc ω_c tq $G_{dB}(\omega_c) = G_{dB}^{max} - 3 \Leftrightarrow \lvert\underline{H}\rvert^2 = \frac{\lvert H_0\rvert^2}{2}$	0.5	

soit $2\frac{\omega_c^2}{\omega_0^2} = 1 + \frac{\omega_c^2}{\omega_0^2} \Leftrightarrow \omega_c = \omega_0$	0.5	
8. Filtre passe haut, de pulsation de coupure à -3dB $\omega_c = \omega_0$ (ou de fréquence de coupure $f = \frac{\omega_c}{2\pi}$), de pente à + 20dB/décade à BF, de gain max à HF $G_{max} = \|H_0\| = \frac{\|\Delta z\|}{\delta}$	1	
9. Comme on veut le gain indépendant de ω, il faut travailler à HF et $\omega \gg \omega_0$	0.5	
10. On vérifie bien que $f = 4\,\text{kHz} \gg \frac{1}{2\pi}\frac{R}{2L_0} \simeq 995\,\text{Hz}$, d'où $\underline{H} \sim H_{as}^{\infty} = H_0 = \frac{\Delta z}{\delta}$ et $u_s \simeq \Re\left(\underline{H} e_0 e^{j\omega t}\right) = \frac{\Delta z}{\delta} e_0 \cos\omega t$: cqfd avec $\varphi = 0$ (remarque : reste vrai même avec $\Delta z < 0$)	1 0.5	
11.a) Sur les deux termes, l'objectif est de conserver celui qui est continu : il suffit d'utiliser un filtre passe-bas pour éliminer la composante de pulsation 2ω, donc avec $\omega_{c2} \ll 2\omega = 4\pi f = 16\pi\, 10^3 \text{rad s}^{-1}$	1	
11.b) on sait que $Z_C \to \infty$ à BF (équivalent à un interrupteur ouvert), et $Z_C \to 0$ à HF, et le filtre RC avec sortie sur C convient si on choisit RC tq ω_{c2} respecte la condition vue en a). Autre solution : de même avec RL sortie sur R. bonus : on doit donc choisir RC tq $\frac{1}{RC} = \omega_{c2} \ll 16\pi\, 10^3 \text{rad s}^{-1}$ – ou bien R et L tq $\frac{R}{L} = \omega_{c2}$ (démo. de la fréquence de coupure du filtre RC ou RL non exigée) bonus : démonstration de la fréquence de coupure du filtre RC ou RL	0.5 0.5 bonus 0.5 bonus 1	

Exercice 2 : Qu'est-il plus facile de faire tenir en équilibre? (12/40)		/ 12
Modélisation 1. Le système étudié est l'objet (crayon ou canne), de masse M et de longueur L, étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen. L'objet est en rotation autour d'un axe fixe horizontal (Oy) (hypothèse de non-glissement du point de contact sur le doigt). Sur le schéma, attention à la cohérence entre l'orientation de l'axe (Oy) et de l'angle θ entre l'objet et la verticale (cf. figure 1). L'objet est soumis à son propre poids : $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$, appliqué au milieu de l'objet (supposé homogène) et à la réaction du doigt sur l'objet $\overrightarrow{R}$, inconnue, appliquée au niveau du point de contact, nommé O. Les frottements sont négligés par hypothèse. Critères : Système + référentiel (0,5), schéma paramétré avec repère correct (0,5), description des forces (nom, symbole, formule, dessin sur schéma : 1pt) Grandeurs pertinentes nommées (M, L, θ) (0,5)	2,5	
Nature de l'équilibre 2. À l'équilibre du système, on a $$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{0} \qquad \text{et} \qquad \sum M\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right)_{Oy} = 0$$ avec $M\left(\overrightarrow{R}\right)_{Oy} = 0$ car $\overrightarrow{R}$ coupe l'axe Oy et $M\left(\overrightarrow{P}\right)_{Oy} = +Mg\frac{L}{2}\sin(\theta)$. Justification des moments (soit produit mixte, soit bras de levier spécifié sur schéma) La somme des moments amène à $\sin(\theta) = 0$, qui admet deux solutions entre 0 et 2π : $\theta = 0$ et $\theta = \pi$. La seconde sera physiquement impossible : l'objet se sera détaché du doigt. On s'intéresse à la stabilité de la première solution : $\theta = 0$. On peut soit faire une étude qualitative en envisageant un petit déplacement dθ positif. Le seul moment du poids qui agit va alors avoir tendance à faire tourner l'objet dans le sens positif des angles, donc à faire croître θ et à éloigner l'objet de son équilibre. Il est donc instable. Sinon on peut faire une étude quantitative, en cherchant le signe de la dérivée seconde l'énergie potentielle de pesanteur E_{pp} pour la position d'équilibre. On a alors $\mathrm{d}E_{pp} = -\mathrm{d}W\left(\overrightarrow{P}\right) = -M\left(\overrightarrow{P}\right)_{Oy}\mathrm{d}\theta = -Mg\frac{L}{2}\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta$	moments 0,5+1 1,5	

D'où l'expression de la dérivée seconde : $\frac{\mathrm{d}^2 E_{pp}}{\mathrm{d}\theta^2} = -Mg\frac{L}{2}\cos(\theta)$ et $\frac{\mathrm{d}^2 E_{pp}}{\mathrm{d}\theta^2}\left(\theta_{eq}=0\right) = -Mg\frac{L}{2}$ est négatif, il s'agit donc d'un maximum d'énergie potentielle et donc d'un équilibre instable.		
Résolution peu guidée 3. Afin de rétablir l'équilibre, la personne va bouger son doigt. Plus la vitesse angulaire sera grande dans les premiers instants, plus l'objet se sera éloigné de sa position d'équilibre, le temps que la personne réagisse et plus il sera compliqué de rétablir un équilibre en adaptant la position de la main.	1	
4. On cherche à déterminer $\dot{\theta}(t)$. L'application du théorème du moment cinétique par rapport à l'axe Oz amène à l'équation $$J\ddot{\theta} = +Mg\frac{L}{2}\sin(\theta)$$ qui devient aux petits angles ($\sin(\theta) \approx \theta$) $$\ddot{\theta} - \frac{3g}{2L}\theta = 0$$	équa diff 1	
L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle est $r^2 - \frac{3g}{2L} = 0$ qui admet deux solutions réelles : $r = \pm\sqrt{\frac{3g}{2L}}$ D'où la solution de l'équation différentielle : $\theta(t) = A\exp\left(\sqrt{\frac{3g}{2L}}t\right) + B\exp\left(-\sqrt{\frac{3g}{2L}}t\right)$, avec A et B des constantes à déterminer à l'aide des conditions initiales.	sol. 1	
On commence par écrire l'expression de la vitesse angulaire : $\dot{\theta}(t) = \sqrt{\frac{3g}{2L}}\left[A\exp\left(\sqrt{\frac{3g}{2L}}t\right) - B\exp\left(-\sqrt{\frac{3g}{2L}}t\right)\right]$ Or $\theta(0) = 0 = A + B$ et $\dot{\theta}(0) = \omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2L}}(A - B)$ d'où $A = -B = \frac{\omega_0}{2\sqrt{\frac{2L}{3g}}}$ (en notant ω_0 la vitesse angulaire initiale) Loi horaire de l'angle au début de la chute : $\theta(t) = \frac{\omega_0}{2}\sqrt{\frac{2L}{3g}}\left[\exp\left(\sqrt{\frac{3g}{2L}}t\right) - \exp\left(-\sqrt{\frac{3g}{2L}}t\right)\right]$ Vitesse angulaire en début de chute : $\dot{\theta}(t) = \frac{\omega_0}{2}\left[\exp\left(\sqrt{\frac{3g}{2L}}t\right) + \exp\left(-\sqrt{\frac{3g}{2L}}t\right)\right]$	constantes : 1	
En utilisant le développement limité proposé, on arrive à l'expression approchée $\dot{\theta}(t) = \frac{\omega_0}{2}\left(2 + \frac{3g}{2L}t^2\right)$	1	
On peut vérifier la dimension du deuxième terme : $\dim\left(\frac{3gt^2}{2L}\right) = \frac{LT^{-2}T^2}{L} = 1$	bonus 0,5	
Interprétation 5. On remarque que la vitesse angulaire est croissante au cours du temps (terme en t^2, donc croissance rapide), ce qui est physiquement logique : il y a une accélération de la rotation de l'objet. Ensuite on remarque que ce deuxième terme est inversement proportionnel à la longueur L de l'objet. Donc plus la longueur L sera grande, plus la croissance de la vitesse angulaire sera faible. Il vaut donc mieux avoir un objet long pour que la vitesse angulaire augmente moins rapidement et laisse davantage de temps à la personne de rétablir l'équilibre.	1,5	

Exercice 3 : Avec des forces de Laplace (14/40)		/ 14
1. Équilibre de la tige AB dans RTSG. Bilan des forces : poids suivant $\vec{e}_z$, réactions en A et B suivant $\vec{e}_z$, force du ressort $\vec{F}_r$ suivant $\vec{e}_x$ et force de Laplace $\vec{F}_\ell$	0.5	
Force du ressort : $\vec{F}_r = -kx\vec{e}_x$	0.5	

Force de Laplace : $d\vec{F}_\ell = I\overrightarrow{d\ell} \wedge \vec{B} = IdyB\vec{e}_x$, d'où $\vec{F}_\ell = \int_{y=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} d\vec{F}_\ell = IaB\vec{e}_x$ avec $I = \dfrac{E}{R}$ de flèche dans le sens de E, et $\overrightarrow{d\ell}$ dans le sens de la flèche de I PFS projeté sur $\vec{e}_x$: $F_r + F_l = 0 = -kx_1 + \dfrac{E}{R}aB$ Soit $x_1 = \dfrac{Eab}{kR}$	1 0.5 0.5 /3	
2. (la tige n'est plus soumise à l'action de la force de Laplace) PFD projeté sur $\vec{e}_x$: $m\ddot{x} = -kx$ $\ddot{x} + \dfrac{k}{m}x = 0$ $x(t) = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi\right)$ avec $\omega_0{}^2 = \dfrac{k}{m}$ A et φ à déterminer avec les conditions initiales sur $x(0) = x_1$ et $\dot{x}(0) = 0$ et on obtient : $x(t) = x_1\cos\left(\omega_0 t\right)$	 0.5 0.5 + 0.5 0.5 + 0.5 /2.5	
3. $\mathscr{E}_{M0} = E_c + E_p$ $E_c = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2$ $E_p = E_{p,p} + E_{p,ressort} = E_{p,ressort} = \dfrac{1}{2}kx^2$ (car $E_{p,p} = K = 0$ (arbitraire)) Soit $\mathscr{E}_{M0} = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \dfrac{1}{2}kx^2$	 0.5 0.5 0.5 + 0.5 /2	
4. Force de Laplace : $\vec{F}_\ell = i(t)aB\vec{e}_x$ PFD projeté sur $\vec{e}_x$: $m\ddot{x} = i(t)aB - kx$ $\ddot{x} + \dfrac{k}{m}x = \dfrac{iaB}{m}$	 0.5 0.5 /1	
5. $\left(-\dfrac{d\mathscr{E}_{M0}}{dt}\right) = -P_J$ Avec $P_J = Ri^2$ (rappel : $\mathscr{E}_{M0} = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \dfrac{1}{2}kx^2$) $m\ddot{x}\dot{x} + kx\dot{x} = -Ri^2 \Leftrightarrow \dot{x}(m\ddot{x} + kx) = -Ri^2$ $\dot{x}(iaB) = -Ri^2$ Soit $i(t) = -\dfrac{aB\dot{x}}{R}$	 0.5 1 0.5 /2	
6. $\ddot{x} + \dfrac{k}{m}x = \dfrac{iaB}{m} = -\dfrac{(aB)^2}{mR}\dot{x}$ $\ddot{x} + \dfrac{(aB)^2}{mR}\dot{x} + \dfrac{k}{m}x = 0$	 /1	
7. Équation caractéristique : $r^2 + 2\delta r + \omega_0{}^2 = 0$ $\Delta = 4(\delta^2 - \omega_0{}^2) = \dfrac{(aB)^4}{(mR)^2} - \dfrac{4k}{m}$ $\Delta = 0$ pour B_c soit $B_c = \dfrac{1}{a}(4R^2km)^{1/4}$	 0.5 0.5 0.5	

	/1.5	
8. Si $B < B_C$ alors $\Delta < 0$ et le mouvement de la tige est oscillant amorti.	/1	
9. Question bonus $x(t)$ de la forme : $x(t) = Ae^{-\delta t}\cos(\omega t + \phi)$ avec : $2\delta = \frac{(aB)^2}{mR}$, ${\omega_0}^2 = \frac{k}{m}$ et $\omega^2 = {\omega_0}^2 - \delta^2$	0.5 0.5 x3 /2 bonus	

FIGURE 1 – Figures des exercices 2 et 3

fin de l'IEFS-S2 juin 2023