Etude d'un anémomètre

1. Géométrie des masses

Réponses :

1.1. L'axe $(O_H,\vec{y}_H)$ est axe de révolution donc le centre d'inertie appartient à cet axe. Son ordonnée y_{G_H} sur cet axe est telle que :

$$y_{G_H} = \frac{1}{M_H}\iint_H y\mathrm{d}m = \frac{1}{M_H}\int_H y\frac{M_H}{S_H}2\pi r\mathrm{d}\ell = \frac{1}{S_H}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\sin\theta 2\pi R\cos\theta R\mathrm{d}\theta = \frac{R^3\pi}{2\pi R^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\mathrm{d}\theta = \frac{R}{2}$$

1.2. $\bar{\bar{I}}_{O_S,S} = \begin{bmatrix} A_S & 0 & 0\\ 0 & A_S & 0\\ 0 & 0 & A_S\end{bmatrix}_R$ avec $A_S = \frac{2}{3}I_{O_S} = \frac{2}{3}M_SR^2$ et I_{O_S} le moment d'inertie polaire.

1.3. L'axe $(O_H,\vec{y}_H)$ est axe de révolution pour la répartition de la masse de l'hémisphère donc :

$$\bar{\bar{I}}_{O_H,H} = \begin{bmatrix} A_H & 0 & 0\\ 0 & B_H & 0\\ 0 & 0 & A_H\end{bmatrix}_{R_H}$$

Un hémisphère creux est la moitié d'une sphère et les quarts de sphère s'appuyant sur les plans du repère R_H permettent, par symétrie, d'écrire :
$A_H = B_H = \frac{A_S}{2} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}M_SR^2 = \frac{2}{3}M_HR^2$

1.4. $(O_1,\vec{x}_H,\vec{y}_H)$ est plan de symétrie pour la répartition des masses donc :

$$\bar{\bar{I}}_{O_1,H} = \begin{bmatrix} A_{H,1} & -F_{H,1} & 0\\ -F_{H,1} & B_{H,1} & 0\\ 0 & 0 & C_{H,1}\end{bmatrix}_{R_H}$$

Le théorème de Koenig appliqué deux fois permet d'écrire :
$\bar{\bar{I}}_{O_1,H} = \bar{\bar{I}}_{O_H,H} - \bar{\bar{I}}_{O_H,\{G_H,M_H\}} + \bar{\bar{I}}_{O_1,\{G_H,M_H\}}$ avec $\overrightarrow{O_1G_H} = \overrightarrow{O_1O_H} + \overrightarrow{O_HG_H} = a\vec{x}_H + \frac{R}{2}\vec{y}_H$, d'où :
$A_{H,1} = A_H - M_H\left(\frac{R}{2}\right)^2 + M_H\left(\frac{R}{2}\right)^2 = A_H$ (moment d'inertie par rapport au même axe),
$B_{H,1} = B_H - 0 + M_Ha^2 = A_H + M_Ha^2$,
$C_{H,1} = A_H - M_H\left(\frac{R}{2}\right)^2 + M_H\left[\left(\frac{R}{2}\right)^2 + a^2\right] = A_H + M_Ha^2 = B_{H,1}$,
$F_{H,1} = 0 - 0 + M_Ha\frac{R}{2} = M_Ha\frac{R}{2}$.
Par analogie, $\bar{\bar{I}}_{O_1,H'} = \begin{bmatrix} A_{H,1} & -F_{H,1} & 0\\ -F_{H,1} & B_{H,1} & 0\\ 0 & 0 & C_{H,1}\end{bmatrix}_{R_{H'}}$ et $\bar{\bar{I}}_{O_1,H''} = \begin{bmatrix} A_{H,1} & -F_{H,1} & 0\\ -F_{H,1} & B_{H,1} & 0\\ 0 & 0 & C_{H,1}\end{bmatrix}_{R_{H''}}$

1.5. $(O_1,\vec{x}_H,\vec{y}_H)$ est plan de symétrie pour la répartition des masses donc :

$\bar{\bar{I}}_{O_1,H'} = \begin{bmatrix} A_{H',1} & -F_{H',1} & 0\\ -F_{H',1} & B_{H',1} & 0\\ 0 & 0 & C_{H',1}\end{bmatrix}_{R_H}$, avec $\vec{x}_H = \cos\alpha\vec{x}_{H'} - \sin\alpha\vec{y}_{H'}$ et $\vec{y}_H = \sin\alpha\vec{x}_{H'} + \cos\alpha\vec{y}_{H'}$:
$A_{H',1} = \vec{x}_H^\top\cdot\bar{\bar{I}}_{O_1,H'}\cdot\vec{x}_H = A_{H,1}\cos^2\alpha + B_{H,1}\sin^2\alpha + 2F_{H,1}\sin\alpha\cos\alpha = 0,25A_{H,1} + 0,75B_{H,1} - \frac{\sqrt{3}}{2}F_{H,1}$,
$B_{H',1} = \vec{y}_H^\top\cdot\bar{\bar{I}}_{O_1,H'}\cdot\vec{y}_H = A_{H,1}\sin^2\alpha + B_{H,1}\cos^2\alpha - 2F_{H,1}\sin\alpha\cos\alpha = 0,75A_{H,1} + 0,25B_{H,1} + \frac{\sqrt{3}}{2}F_{H,1}$,
$C_{H',1} = C_{H,1}$,
$F_{H',1} = -\vec{x}_H^\top\cdot\bar{\bar{I}}_{O_1,H'}\cdot\vec{y}_H = (B_{H,1} - A_{H,1})\sin\alpha\cos\alpha + F_{H,1}\cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{4}(B_{H,1} - A_{H,1}) - 0,5F_{H,1}$.
Par analogie avec $\alpha\to 2\alpha$ et donc, $\cos\alpha\to\cos\alpha$ et $\sin\alpha\to -\sin\alpha$:

$\bar{\bar{I}}_{O_1,H''} = \begin{bmatrix} A_{H'',1} & -F_{H'',1} & 0\\ -F_{H'',1} & B_{H'',1} & 0\\ 0 & 0 & C_{H'',1}\end{bmatrix}_{R_H}$, avec :

$A_{H'',1} = A_{H,1}\cos^2\alpha + B_{H,1}\sin^2\alpha - 2F_{H,1}\sin\alpha\cos\alpha = 0,25A_{H,1} + 0,75B_{H,1} + \frac{\sqrt{3}}{2}F_{H,1}$,
$B_{H'',1} = A_{H,1}\sin^2\alpha + B_{H,1}\cos^2\alpha + 2F_{H,1}\sin\alpha\cos\alpha = 0,75A_{H,1} + 0,25B_{H,1} - \frac{\sqrt{3}}{2}F_{H,1}$,
$C_{H'',1} = C_{H,1}$,
$F_{H'',1} = (A_{H,1} - B_{H,1})\sin\alpha\cos\alpha + F_{H,1}\cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{4}(A_{H,1} - B_{H,1}) - 0,5F_{H,1}$.

1.6. $(O_1,\vec{z}_H)$ et $(O_1,\vec{x}_H,\vec{y}_H)$ sont respectivement axe et plan de symétrie pour la répartition des masses de l'anémomètre. Son centre d'inertie est à l'intersection, c'est donc le point O_1.

1.7. $(O_1,\vec{x}_H,\vec{y}_H)$ est plan de symétrie donc :

$\bar{\bar{I}}_{O_1,S_1} = \begin{bmatrix} A_1 & -F_1 & 0\\ -F_1 & B_1 & 0\\ 0 & 0 & C_1\end{bmatrix}_{R_H}$, avec :
$A_1 = A_{H,1} + A_{H',1} + A_{H'',1}$,
$B_1 = B_{H,1} + B_{H',1} + B_{H'',1}$,

$C_1 = C_{H,1} + C_{H',1} + C_{H'',1} = 3C_{H,1}$,
$F_1 = F_{H,1} + F_{H',1} + F_{H'',1} = 0$

On note que : $A_1 = B_1 = \dfrac{3}{2}(A_{H,1} + B_{H,1})$ et finalement $\bar{\bar{I}}_{O_1,S_1} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{R_H}$. L'axe $(O_1,\vec{z}_H)$ est donc simplement un axe de symétrie géométrique d'ordre 3 mais un axe de révolution pour la répartition des masses.

2. Cinétique et dynamique

Réponses :

2.1. $\{\mathcal{C}_{1/0}\}_{(O_1)} : \begin{cases} \vec{p}\,(1/0) = M_1\vec{V}\,(O_1/0) = \vec{0} \\ \vec{\sigma}\,(O_1, 1/0) = \bar{\bar{I}}_{O_1,S_1} \cdot \vec{\Omega}(1/0) = C_1\dot{\psi}\vec{z}_{0,1} \end{cases}$

2.2. $\{\mathcal{C}_{2/0}\}_{(O_2)} : \begin{cases} \vec{p}\,(2/0) = M_2\vec{V}\,(G_2/0) = M_2 e\dot{\phi}\vec{y}_2 \\ \vec{\sigma}\,(O_2, 2/0) = \bar{\bar{I}}_{G_2,S_2} \cdot \vec{\Omega}(2/0) + \overrightarrow{O_2G_2} \wedge M_2\vec{V}\,(G_2/0) = -E_2\dot{\phi}\vec{x}_2 + \left(C_2 + M_2e^2\right)\dot{\phi}\vec{z}_{0,2} \end{cases}$

2.3. $\{\mathcal{C}_{\{1+2\}/0}\}_{(O)} : \begin{cases} \vec{p}\,(\{1+2\}/0) = \vec{p}\,(1/0) + \vec{p}\,(2/0) = M_2e\dot{\phi}\vec{y}_2 \\ \vec{\sigma}\,(O, \{1+2\}/0) = \vec{\sigma}\,(O, 1/0) + \vec{\sigma}\,(O, 2/0) \end{cases}$

et

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}\,(O, 1/0) + \vec{\sigma}\,(O, 2/0) &= \vec{\sigma}\,(O_1, 1/0) + \vec{\sigma}\,(O_2, 2/0) + \overrightarrow{OO_2} \wedge M_2\vec{V}\,(G_2/0) \\ &= C_1\dot{\psi}\vec{z}_{0,1} - E_2\dot{\phi}\vec{x}_2 + \left(C_2 + M_2e^2 - M_2be\cos\phi\right)\dot{\phi}\vec{z}_{0,2} \end{aligned}$$

2.4. $\{\mathcal{D}_{2/0}\}_{(O_2)} : \begin{cases} \vec{D}\,(2/0) = M_2\vec{A}\,(G_2/0) = M_2e\ddot{\phi}\vec{y}_2 - M_2e\dot{\phi}^2\vec{x}_2 \\ \vec{\delta}\,(O_2, 2/0) = \left(\frac{d\vec{\sigma}(O_2,2/0)}{dt}\right)_0 + \vec{V}\,(O_2/0) \wedge M_2\vec{V}\,(G_2/0) = \left(\frac{d\vec{\sigma}(O_2,2/0)}{dt}\right)_0 \end{cases}$

et $\left(\frac{d\vec{\sigma}(O_2,2/0)}{dt}\right)_0 = -E_2\ddot{\phi}\vec{x}_2 - E_2\dot{\phi}^2\vec{y}_2 + \left(C_2 + M_2e^2\right)\ddot{\phi}\vec{z}_{0,2}$

Remarque : $\vec{\delta}\,(O_2, 2/0) = \vec{\delta}\,(G_2, 2/0) + \overrightarrow{O_2G_2} \wedge \vec{D}\,(2/0) = \left(\frac{d\left(\bar{\bar{I}}_{G_2,S_2} \cdot \vec{\Omega}(2/0)\right)}{dt}\right)_0 + \overrightarrow{O_2G_2} \wedge \vec{D}\,(2/0) = \left(\frac{d\left(-E_2\dot{\phi}\vec{x}_2 + C_2\dot{\phi}\vec{z}_{0,2}\right)}{dt}\right)_0 + e\vec{x}_2 \wedge \left(M_2e\ddot{\phi}\vec{y}_2 - M_2e\dot{\phi}^2\vec{x}_2\right)$ mène au même résultat.

2.5. $T^0_{\{1+2\}/0} = T^0_{1/0} + T^0_{2/0} = \frac{1}{2}\vec{\Omega}(1/0)^\top \cdot \bar{\bar{I}}_{O_1,1} \cdot \vec{\Omega}(1/0) + \frac{1}{2}\vec{\Omega}(2/0)^\top \cdot \bar{\bar{I}}_{G_2,2} \cdot \vec{\Omega}(2/0) + \frac{1}{2}M_2\left[\vec{V}\,(G_2/0)\right]^2 = \frac{1}{2}C_1\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}\left(C_2 + M_2e^2\right)\dot{\phi}^2$