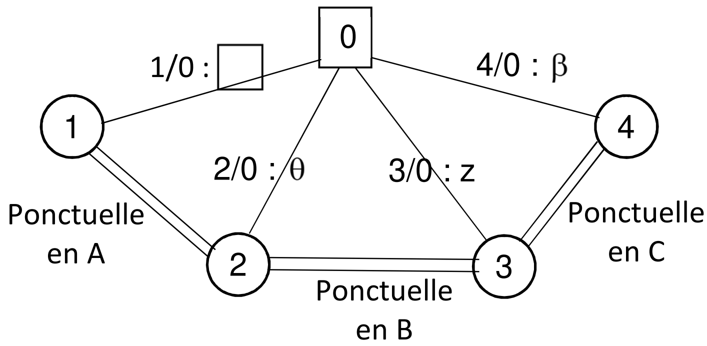
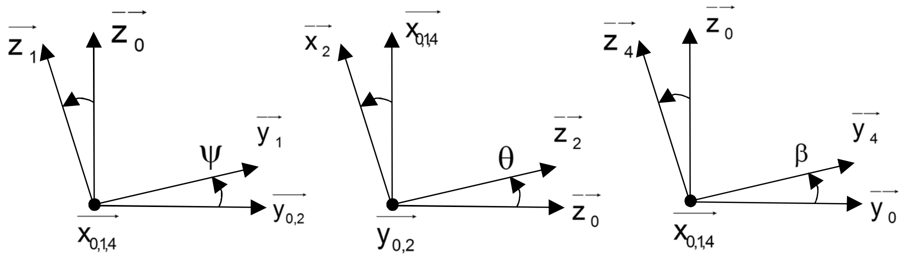
Mécanique Générale – EFS Piano (2h) - Corrigé

1ère partie : Effet du mouvement de la pédale douce sur les marteaux

1) Graphe des liaisons :



Figures de changement de base.



Pour rappel :

$$\begin{cases}\overrightarrow{x_3}=\overrightarrow{x_0}\\ \overrightarrow{y_3}=\overrightarrow{y_0}\\ \overrightarrow{z_3}=\overrightarrow{z_0}\end{cases}$$

2) 3 conditions de liaison et développement de 2 d'entre elles :

- Liaison ponctuelle en A : $\boxed{\overrightarrow{O_2A}\cdot\overrightarrow{z_2}=0}$ avec $\overrightarrow{O_2A}=\overrightarrow{O_2O}+\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1A}=a\overrightarrow{y_0}-\ell\overrightarrow{x_0}-a\overrightarrow{y_1}$

  donc $\left(a\overrightarrow{y_{0,2}}-\ell\overrightarrow{x_{0,1}}-a\overrightarrow{y_1}\right)\cdot\overrightarrow{z_2}=-\ell\sin\theta-a\sin\psi\cos\theta=0$ soit $\boxed{\ell\tan\theta=-a\sin\psi}$ (1) car $\theta\neq\pm\dfrac{\pi}{2}$.

- Liaison ponctuelle en B : $\boxed{\overrightarrow{O_2B}\cdot\overrightarrow{z_2}=0}$ avec $\overrightarrow{O_2B}=\overrightarrow{O_2O'}+\overrightarrow{O'C}+\overrightarrow{CB}=d\overrightarrow{x_0}+z\overrightarrow{z_{0,3}}-b\overrightarrow{z_3}$

  donc $\left[d\overrightarrow{x_0}+z\overrightarrow{z_{0,3}}-b\overrightarrow{z_3}\right]\cdot\overrightarrow{z_2}=d\sin\theta+(z-b)\cos\theta=0$ soit $\boxed{\tan\theta=\dfrac{b-z}{d}}$ (2) car $\theta\neq\pm\dfrac{\pi}{2}$.

- Liaison ponctuelle en C : $\boxed{\overrightarrow{O_4C}\cdot\overrightarrow{z_4}=0}$

  avec $\overrightarrow{O_4C}=\overrightarrow{O_4O'}+\overrightarrow{O'C}=-b\overrightarrow{z_0}-c\overrightarrow{y_0}+z\overrightarrow{z_{0,3}}$

Non demandé

donc $\left[-c\overrightarrow{y_0}+(z-b)\overrightarrow{z_{0,3}}\right]\cdot\overrightarrow{z_4}=c\sin\beta+(z-b)\cos\beta=0$ soit $\boxed{\tan\beta=\dfrac{b-z}{c}}$ (3) car $\beta\neq\pm\dfrac{\pi}{2}$.

$\Rightarrow$ **Degré de mobilité** = nb paramètres – nb équations = 4 – 3 = $\boxed{1}$

3) Relation entre l'angle d'entrée ψ et l'angle de sortie β :

Les équations (2) et (3) donnent : $d\tan\theta=c\tan\beta$

En remplaçant $\tan\theta$ par $\dfrac{c}{d}\tan\beta$ dans l'équation (1) : $\ell\dfrac{c}{d}\tan\beta=-a\sin\psi$ d'où $\boxed{\tan\beta=-\dfrac{ad}{c\ell}\sin\psi}$ (4)

Rapport $\rho=\dfrac{\dot\beta}{\dot\psi}$, en fonction du paramètre d'entrée ψ :

Dérivation de l'équation de liaison (4) par rapport au temps : $\dot\beta\left(1+\tan^2\beta\right)=-\dfrac{ad}{c\ell}\dot\psi\cos\psi$

puis remplacement de $\tan\beta$ par $-\dfrac{ad}{c\ell}\sin\psi$ (équation (4) également) $\Rightarrow \boxed{\rho=\dfrac{\dot\beta}{\dot\psi}=\dfrac{-\dfrac{ad}{c\ell}\cos\psi}{1+\left(\dfrac{ad}{c\ell}\sin\psi\right)^2}}$

Application numérique pour $\psi=0$: $\rho=-\dfrac{ad}{c\ell}=-\dfrac{6*45}{3,6*25}=\boxed{-3}$

4) Pivotement et roulement en A :

$\overrightarrow{P_{1/2}}(A)=\left(\overrightarrow{\Omega_{1/2}}\cdot\vec n\right)\vec n=\left[\left(\dot\psi\overrightarrow{x_{0,1}}-\dot\theta\overrightarrow{y_{0,2}}\right)\cdot\overrightarrow{z_2}\right]\overrightarrow{z_2}=\boxed{\dot\psi\sin\theta\overrightarrow{z_2}}$ et donc

$\overrightarrow{R_{1/2}}(A)=\overrightarrow{\Omega_{1/2}}-\overrightarrow{P_{1/2}}(A)=\dot\psi\overrightarrow{x_{0,1}}-\dot\theta\overrightarrow{y_{0,2}}-\dot\psi\sin\theta\overrightarrow{z_2}=\dot\psi\left(\cos\theta\overrightarrow{x_2}+\sin\theta\overrightarrow{z_2}\right)-\dot\theta\overrightarrow{y_{0,2}}-\dot\psi\sin\theta\overrightarrow{z_2}=\boxed{\dot\psi\cos\theta\overrightarrow{x_2}-\dot\theta\overrightarrow{y_{0,2}}}$

Vitesse de glissement en A (1 seule méthode demandée) :

a. Champ des vitesses :

$$\vec V(A,1/2)=\cancel{\vec V(O,1/2)}+\overrightarrow{\Omega_{1/2}}\wedge\overrightarrow{OA}=(\dot\psi\overrightarrow{x_{0,1}}-\dot\theta\overrightarrow{y_{0,2}})\wedge(-\ell\overrightarrow{x_0}-a\overrightarrow{y_1})=\boxed{-a\dot\psi\overrightarrow{z_1}-\ell\dot\theta\overrightarrow{z_0}+a\dot\theta\sin\psi\overrightarrow{x_{0,1}}}$$

b. Dérivation :

$$\vec V(A,1/2)=\vec V(A/2)=\left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{O_2A}\right)_2$$ avec $\overrightarrow{O_2A}=a\overrightarrow{y_{0,2}}-\ell\overrightarrow{x_0}-a\overrightarrow{y_1}$ et avec la base mobile :

$$\vec V(A/2)=-\ell\overrightarrow{\Omega_{0/2}}\wedge\overrightarrow{x_0}-a\overrightarrow{\Omega_{1/2}}\wedge\overrightarrow{y_1}=\ell\dot\theta\overrightarrow{y_{0/2}}\wedge\overrightarrow{x_0}-a(\dot\psi\overrightarrow{x_{0,1}}-\dot\theta\overrightarrow{y_{0,2}})\wedge\overrightarrow{y_1}=\boxed{-\ell\dot\theta\overrightarrow{z_0}-a\dot\psi\overrightarrow{z_1}+a\dot\theta\sin\psi\overrightarrow{x_{0,1}}}$$

Remarque : idem que différence des vitesses des points géométriques :

$$\vec V(A,1/2)=\vec V(A/2)-\vec V(A/1)=\left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{O_2A}\right)_2-\cancel{\left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{O_1A}\right)_1}$$

c. Composition :

$$\vec V(A,1/2)=\vec V(A,1/0)-\vec V(A,2/0)=\left[\cancel{\vec V(O_1,1/0)}+\overrightarrow{\Omega_{1/0}}\wedge\overrightarrow{O_1A}\right]-\left[\cancel{\vec V(O,2/0)}+\overrightarrow{\Omega_{2/0}}\wedge\overrightarrow{OA}\right]$$

$$=\overrightarrow{\Omega_{1/0}}\wedge\overrightarrow{O_1A}-\overrightarrow{\Omega_{2/0}}\wedge\overrightarrow{OA}=\dot\psi\overrightarrow{x_{0,1}}\wedge(-a\overrightarrow{y_1})+(-\dot\theta\overrightarrow{y_{0,2}})\wedge(-\ell\overrightarrow{x_0}-a\overrightarrow{y_1})=\boxed{-a\dot\psi\overrightarrow{z_1}-\ell\dot\theta\overrightarrow{z_0}+a\dot\theta\sin\psi\overrightarrow{x_{0,1}}}$$

Dans quel plan se situe-t-elle ? le vérifier.

La vitesse de glissement en A se situe dans le plan $(O_2,\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2})$ car :

$\vec V(A,1/2)\cdot\overrightarrow{z_2}=-a\dot\psi\cos\psi\cos\theta-\ell\dot\theta\cos\theta+a\dot\theta\sin\psi\sin\theta$

Or l'équation de liaison est : $\ell\tan\theta=-a\sin\psi \Leftrightarrow \ell\sin\theta=-a\sin\psi\cos\theta$

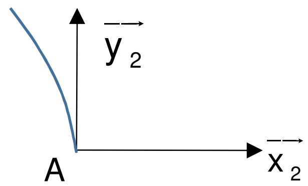
qui donne, lorsqu'on la dérive par rapport au temps : $\ell\dot\theta\cos\theta=-a\dot\psi\cos\psi\cos\theta+a\dot\theta\sin\psi\sin\theta$

Donc on vérifie bien que $\boxed{\vec V(A,1/2)\cdot\overrightarrow{z_2}=0}$

Définir précisément

- **mouvement de S_1 par rapport à R_0 :** rotation d'axe $(O_1,\overrightarrow{x_{0,1}})=(O,\overrightarrow{x_{0,1}})$;
- **trajectoire de A dans R_0 :** arc du cercle de centre O_1, de rayon O_1A, dans le plan $(O_1,\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$

- **trajectoire de A dans R_2 ?** trajectoire plane (plan $(O_2,\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2})$) mais non rectiligne (curviligne).



5) Pivotement et roulement en B :

$\boxed{\overrightarrow{P_{3/2}}(B)=\vec{0}}$: en effet, le mouvement 3/2 se situe dans le plan $(O_2,\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{z_2})$, donc les seules rotations non nulles sont celles autour de $\overrightarrow{y_2}$; or la normale au contact en B est $\overrightarrow{z_2}$, le pivotement (rotation $/\overrightarrow{z_2}$) est donc nul.

$\overrightarrow{R_{3/2}}(B)=\overrightarrow{\Omega_{3/2}}-\cancel{\overrightarrow{P_{3/2}}(B)}=\overrightarrow{\Omega_{3/2}}=\overrightarrow{\Omega_{3/0}}-\overrightarrow{\Omega_{0/2}}=\boxed{-\dot{\theta}\overrightarrow{y_{0,2}}}$

Définir précisément :

- **mouvement de S_3 par rapport à R_0 :** translation rectiligne de direction $\overrightarrow{z_{0,3}}$;
- **trajectoire de B dans R_0 :** segment de la droite $(O',\overrightarrow{z_{0,3}})$;
- **trajectoire de B dans R_2** : segment de la droite $(O_2,\overrightarrow{x_2})$.

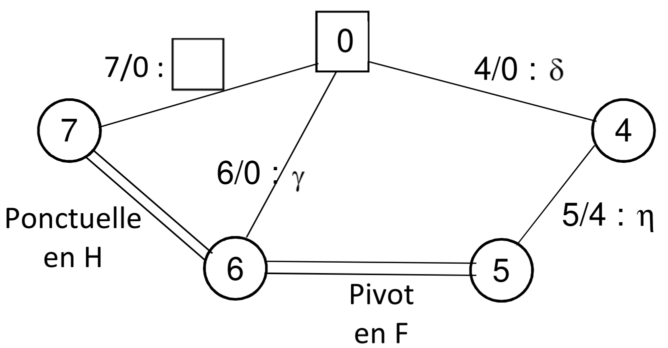
Abscisse x de B à partir de O_2 et vitesse de glissement en B :

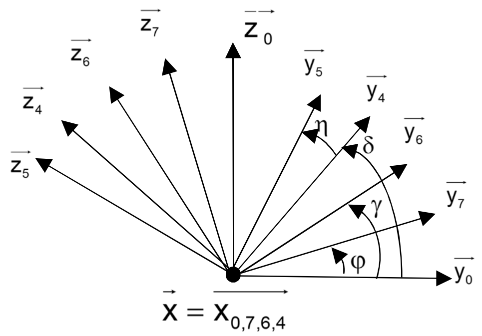
$$x=\overrightarrow{O_2B}\cdot\overrightarrow{x_2}=(d\overrightarrow{x_0}+z\overrightarrow{z_{0,3}}-b\overrightarrow{z_3})\cdot\overrightarrow{x_2}=d\cos\theta-(z-b)\sin\theta$$

$$\Rightarrow \vec{V}(B,3/2)=\vec{V}(B/2)=\left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{O_2B}\right)_2=\left(\frac{d}{dt}(x\overrightarrow{x_2})\right)_2=\dot{x}\overrightarrow{x_2}=\boxed{\left[-d\dot{\theta}\sin\theta-\dot{z}\sin\theta-(z-b)\dot{\theta}\cos\theta\right]\overrightarrow{x_2}}$$

2nde partie : Effet du mouvement d'une touche du clavier sur le marteau associé

1) Graphe des liaisons et figures de changement de base :





2) Conditions de liaison et développement de celle traduisant la pivot :

- Liaison pivot en F : $\boxed{\overrightarrow{F_{(6)}F_{(5)}}=\vec{0}}$

Avec $\overrightarrow{F_{(6)}F_{(5)}}=\overrightarrow{F_{(6)}O_6}+\overrightarrow{O_6O_4}+\overrightarrow{O_4E}+\overrightarrow{EF_{(5)}}=y_F\overrightarrow{y_6}-z_F\overrightarrow{z_6}+z_4\overrightarrow{z_0}-y_E\overrightarrow{y_4}-L\overrightarrow{z_5}$

Soit dans R_0 (base la plus pratique) :

$$\boxed{\begin{cases} y_F\cos\gamma+z_F\sin\gamma-y_E\cos\delta+L\sin(\delta+\eta)=0 \\ y_F\sin\gamma-z_F\cos\gamma+z_4-y_E\sin\delta-L\cos(\delta+\eta)=0 \end{cases}} \quad (5)$$

- Liaison ponctuelle en H : $\boxed{\overrightarrow{O_6H}\cdot\overrightarrow{z_6}=0}$

Non demandé

Avec $\overrightarrow{O_6H}=\overrightarrow{O_6O_7}+\overrightarrow{O_7H}=-y_6\overrightarrow{y_0}-z_6\overrightarrow{z_0}+y_H\overrightarrow{y_7}+z_H\overrightarrow{z_7}$

Donc $\left(-y_6\overrightarrow{y_0}-z_6\overrightarrow{z_0}+y_H\overrightarrow{y_7}+z_H\overrightarrow{z_7}\right)\cdot\overrightarrow{z_6}=\boxed{y_6\sin\gamma-z_6\cos\gamma-y_H\sin(\gamma-\varphi)+z_H\cos(\gamma-\varphi)=0}$ (6)

$\Rightarrow$ **Degré de mobilité** = nb paramètres – nb équations = 4 – 3 = $\boxed{1}$

3) Vitesse de F par rapport à R_0 :

a. Champ de vitesses : $\vec V(F/0)=\vec V(E/0)+\vec\Omega_{5/0}\wedge\overrightarrow{EF}$

avec $\vec V(E/0)=\cancel{\vec V(O_4/0)}+\vec\Omega_{4/0}\wedge\overrightarrow{O_4E}=\dot\delta\vec x\wedge(-y_E\overrightarrow{y_4})=\boxed{-y_E\dot\delta\overrightarrow{z_4}}$

et donc $\vec V(F/0)=-y_E\dot\delta\overrightarrow{z_4}+(\dot\eta+\dot\delta)\vec x\wedge(-L\overrightarrow{z_5})=\boxed{-y_E\dot\delta\overrightarrow{z_4}+L(\dot\eta+\dot\delta)\overrightarrow{y_5}}$

b. Dérivation : $\vec V(F/0)=\left(\dfrac{d}{dt}\overrightarrow{O_4F}\right)_0$ avec $\overrightarrow{O_2A}=-y_E\overrightarrow{y_4}-L\overrightarrow{z_5}$ et avec la base mobile :

$$\vec V(F/0)=-y_E\vec\Omega_{4/0}\wedge\overrightarrow{y_4}-L\vec\Omega_{5/0}\wedge\overrightarrow{z_5}=\boxed{-y_E\dot\delta\overrightarrow{z_4}+L(\dot\eta+\dot\delta)\overrightarrow{y_5}}$$

c. Composition :

$$\vec V(F/0)=\vec V(F/4)+\vec V(F,4/0)=\left[\cancel{\vec V(E/4)}+\overrightarrow{\Omega_{5/4}}\wedge\overrightarrow{EF}\right]+\left[\cancel{\vec V(O_4,4/0)}+\overrightarrow{\Omega_{4/0}}\wedge\overrightarrow{O_4F}\right]$$

$$=\dot\eta\vec x\wedge-L\overrightarrow{z_5}+\dot\delta\vec x\wedge(-y_E\overrightarrow{y_4}-L\overrightarrow{z_5})=\boxed{L\dot\eta\overrightarrow{y_5}-y_E\dot\delta\overrightarrow{z_4}+L\dot\delta\overrightarrow{y_5}}$$

Accélération de F par rapport à R_0 :

Par dérivation : $\vec\Gamma(F/0)=\left[\dfrac{d}{dt}\vec V(F/0)\right]_0=-y_E\ddot\delta\overrightarrow{z_4}-y_E\dot\delta\left(\dfrac{d\overrightarrow{z_4}}{dt}\right)_0+L(\ddot\eta+\ddot\delta)\overrightarrow{y_5}+L(\dot\eta+\dot\delta)\left(\dfrac{d\overrightarrow{y_5}}{dt}\right)_0$

Avec $\left(\dfrac{d\overrightarrow{z_4}}{dt}\right)_0=\left(\dfrac{d\overrightarrow{z_4}}{dt}\right)_4+\vec\Omega_{4/0}\wedge\overrightarrow{z_4}=\dot\delta\vec x\wedge\overrightarrow{z_4}=-\dot\delta\overrightarrow{y_4}$

Et $\left(\dfrac{d\overrightarrow{y_5}}{dt}\right)_0=\left(\dfrac{d\overrightarrow{y_5}}{dt}\right)_5+\vec\Omega_{5/0}\wedge\overrightarrow{y_5}=(\dot\eta+\dot\delta)\vec x\wedge\overrightarrow{y_5}=(\dot\eta+\dot\delta)\overrightarrow{z_5}$

D'où $\boxed{\vec\Gamma(F/0)=-y_E\ddot\delta\overrightarrow{z_4}+y_E\dot\delta^2\overrightarrow{y_4}+L(\ddot\eta+\ddot\delta)\overrightarrow{y_5}+L(\dot\eta+\dot\delta)^2\overrightarrow{z_5}}$

Remarque : ou en démarrant par le champ des accélérations ou par la composition.

d. **<u>Cinématique graphique</u> :**

a. **Figure 3 :**

- **vitesse de H/0 :** distribution des vitesses de 7/0 autour du CIR $I_{70}=O_7$ (ou équiprojectivité) ;
- **vitesse de glissement en H** soit $\vec V(H,7/6)=\vec V(H/6)$

$$\underbrace{\vec V(H,7/6)}_{\substack{\text{Direction connue}\\ //(O_6H)}}=\underbrace{\vec V(H,7/0)}_{\substack{=\vec V(H/0)\\ \text{Connue}}}-\underbrace{\vec V(H,6/0)}_{\substack{\text{Direction connue}\\ \perp(I_{60}H)\text{ soit}\perp(O_6H)}}\quad\text{ou}\quad\underbrace{\vec V(H/6)}_{\substack{\text{Direction connue}\\ //(O_6H)}}=\underbrace{\vec V(H/0)}_{\text{Connue}}-\underbrace{\vec V(H,6/0)}_{\substack{\text{Direction connue}\\ \perp(I_{60}H)\text{ soit}\perp(O_6H)}}$$

b. **Figure 4 :**

- **vitesse de F/0 :** distribution des vitesses de 6/0 autour du CIR $I_{60}=O_6$ (ou équiprojectivité) ;
- **mouvement linéairement tangent à 5/0 ?** rotation de centre I_{50} dans le plan de l'étude ; **construction du CIR I_{50}** : par intersection de $(O_6F)=(I_{60}F)$ ($\perp$ à $\vec V(F/0)=\vec V(F,5/0)$) et de $(O_4E)=(I_{40}E)$ ($\perp$ à $\vec V(E/0)=\vec V(E,5/0)$)

- **vitesse de E/0 :** $\vec{V}(E/0)=\vec{V}(E,5/0)$ par distribution des vitesses de 5/0 autour de I_{50} (ou équiprojectivité) ; *remarque : par hasard, $I_{50}F = I_{50}E$…*

c. Figure 3 :

- **report de la vitesse de E/0 :** 2,6 cm * 2/3 ≈ 1,75 cm sur le dessin à la main
- **vitesse de M/0 :** distribution des vitesses de 4/0 autour du CIR $I_{40} = O_4$ (ou équiproj.)

d. Rapport entre les normes des vitesses /0 de sortie (point M) et d'entrée (point D) :

$\dfrac{\left\|\vec{V}(M/0)\right\|}{\left\|\vec{V}(D/0)\right\|} \simeq \dfrac{8}{3,2} \simeq 2,5$ sur le dessin à la main ; $\dfrac{\left\|\vec{V}(M/0)\right\|}{\left\|\vec{V}(D/0)\right\|} \simeq 2,4$ sur la figure ci-dessous

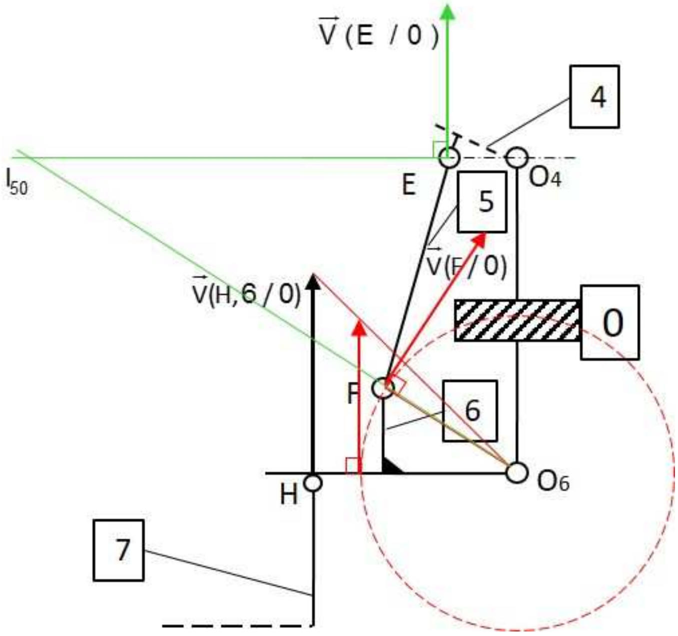


Figure 4

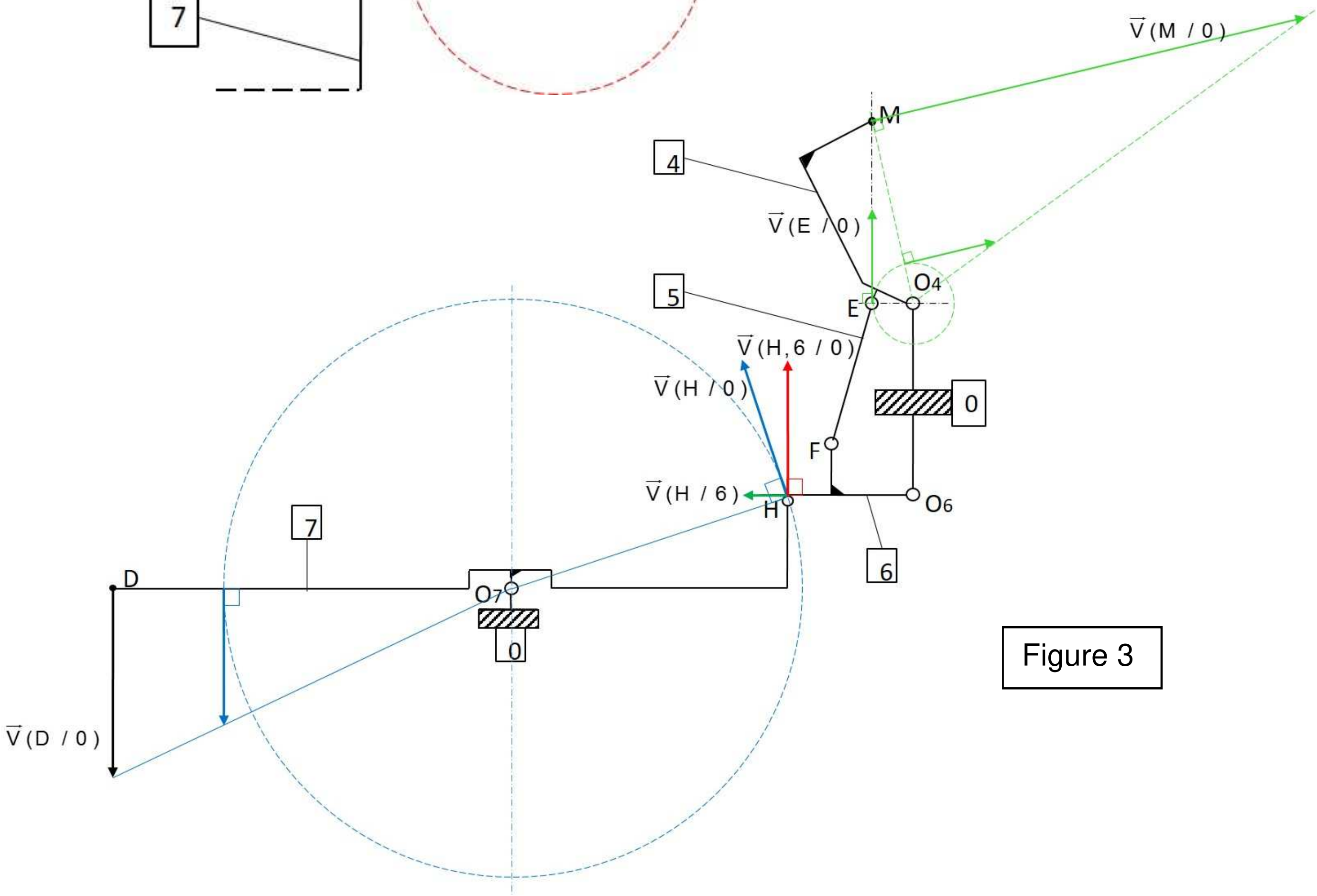


Figure 3