

Mécanique Générale – Evaluation de Fin de Semestre

Jeudi 31 janvier 2019 – 2h (14h-16h)

Sont autorisés : Formulaire (1 feuille A4 recto-verso + 1 tableau des liaisons) + calculatrice.

Barème indicatif 1^{ère} partie : **10,5 points** 1) 0,5 pt – 2) 3 pts – 3) 1,5 pt – 4) 3,5 pts – 5) 2 pts
2^{nde} partie : **9,5 points** 1) 0,5 pt – 2) 1,5 pt – 3) 3 pts – 4) 4,5 pts

Les deux parties sont indépendantes.

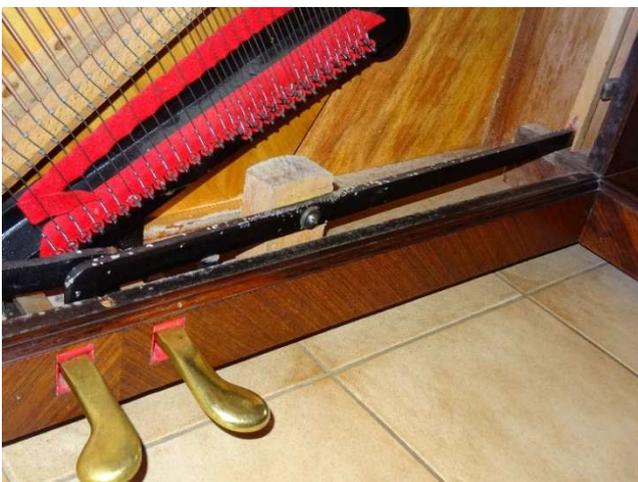
ETUDE CINEMATIQUE D'UN PIANO DROIT

Remarque préalable : tous les trièdres évoqués dans ce sujet sont orthonormés directs.

1^{ère} partie : Effet du mouvement de la pédale douce sur les marteaux

Sur un piano droit, la pédale de gauche, ou pédale douce, réduit la distance entre les cordes et les têtes de marteau qui les frappent : la course des marteaux est raccourcie, ce qui diminue la vitesse de frappe du marteau sur la corde et rend la sonorité plus douce.

L'objectif de cette partie est d'étudier le déplacement du marteau en fonction de celui de la pédale.



Le schéma cinématique de la figure 1 comporte les solides rigides suivants :

- S_0 est le châssis du piano, auquel est lié le repère $R_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$;
- S_1 est la pédale douce, sur laquelle le pied du pianiste appuie au point P ; le repère $R_1 = (O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est lié à S_1 ; on définit $\vec{O_1O} = \ell \vec{x}_0$ et $\vec{AO_1} = a \vec{y}_1$ (ℓ et a constantes positives) ;
- S_2 est la prolonge de pédale, à laquelle est lié le repère $R_2 = (O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$; on a $\vec{O_2O} = a \vec{y}_0$;
- S_3 est la tige de pédale, à laquelle est liée la base $(\vec{x}_{3,0}, \vec{y}_{3,0}, \vec{z}_{3,0})$; on définit $\vec{O_2O'} = d \vec{x}_0$ et $\vec{BC} = b \vec{z}_3$ (d et b constantes positives) ;
- S_4 est la barre de repos, solidaire du marteau dans le mouvement étudié, M étant le point qui frappera ultérieurement la corde ; le repère $R_4 = (O_4, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$ est lié à S_4 ; on définit $\vec{O'O_4} = b \vec{z}_0 + c \vec{y}_0$ (b et c constantes positives).

Liaisons paramétrées :

- S_1 est en liaison pivot d'axe $(O, \vec{x}_{0,1}) = (O_1, \vec{x}_{0,1})$ avec S_0 ; le paramètre du mouvement de R_1 par rapport à R_0 est $\psi = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$;
- S_2 est en liaison pivot d'axe $(O, \vec{y}_{0,2}) = (O_2, \vec{y}_{0,2})$ avec S_0 ; le paramètre du mouvement de R_2 par rapport à R_0 est $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_2)$;
- S_3 est en liaison glissière de direction $\vec{z}_{0,3}$ avec S_0 ; le paramètre du mouvement de R_3 par rapport à R_0 est $z = \vec{O'C} \cdot \vec{z}_{0,3}$;
- S_4 est en liaison pivot d'axe $(O_4, \vec{x}_{0,4})$ avec S_0 ; le paramètre du mouvement de R_4 par rapport à R_0 est $\beta = (\vec{y}_0, \vec{y}_4)$.

Liaisons non paramétrées :

- S_1 est en liaison ponctuelle avec S_2 au point A (fixe dans S_1), la liaison est de normale \vec{z}_2 ;
- S_3 est en liaison ponctuelle avec S_2 au point B (fixe dans S_3), la liaison est de normale \vec{z}_2 ;
- S_3 est en liaison ponctuelle avec S_4 au point C (fixe dans S_3), la liaison est de normale \vec{z}_4 .

Questions :

- 1) Etablir le graphe des liaisons de ce mécanisme.

Tracer les figures de changement de base.

- 2) Donner les conditions de liaison.

Développer ces conditions de liaison et obtenir les équations de liaison entre paramètres du mouvement, SAUF pour l'équation résultant du contact en C que l'on ne redémontrera pas :

$$\tan\beta = \frac{b-z}{c}.$$

Calculer le degré de mobilité.

- 3) Dédire des relations précédentes la relation entre l'angle d'entrée ψ et l'angle de sortie β :

$$\tan\beta = -\frac{ad}{c\ell} \sin\psi.$$

Donner le rapport $\rho = \frac{\dot{\beta}}{\dot{\psi}}$ entre la vitesse angulaire de sortie $\dot{\beta} = \frac{d\beta}{dt}$ et la vitesse angulaire

d'entrée $\dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt}$, en fonction du paramètre d'entrée ψ et des grandeurs géométriques constantes.

On mesure : $a=6$ cm, $c=3,6$ cm, $d=45$ cm, $\ell=25$ cm. Calculer la valeur numérique de ρ pour $\psi=0$.

- 4) Déterminer les expressions du pivotement et du roulement au point A, en fonction des paramètres du mouvement.

Déterminer l'expression de la vitesse de glissement au point A, en fonction des paramètres du mouvement et des grandeurs géométriques ; dans quel plan se situe-t-elle ? le vérifier.

Définir précisément le mouvement de S_1 par rapport à R_0 et la trajectoire du point A dans R_0 ; que devient la trajectoire du point A dans R_2 ? (on pourra esquisser la courbe).

- 5) Donner les expressions du pivotement et du roulement au point B, en fonction des paramètres du mouvement.

Définir précisément le mouvement de S_3 par rapport à R_0 et la trajectoire du point B dans R_0 et dans R_2 .

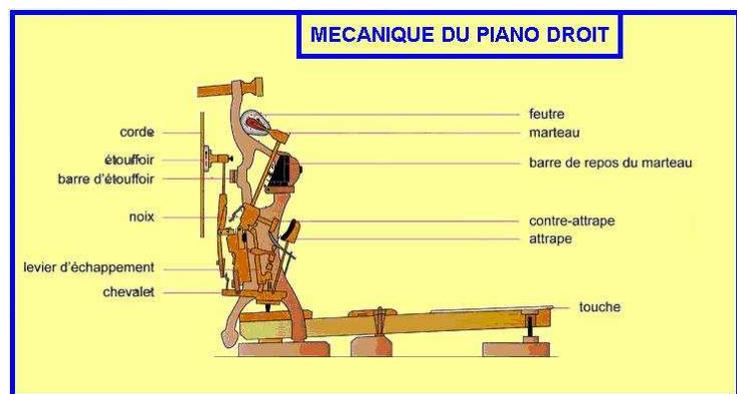
Soit $\overrightarrow{O_2B} = x\overrightarrow{x_2}$; déterminer l'expression de x , et en déduire l'expression de la vitesse de glissement en B, en fonction des paramètres du mouvement et des grandeurs géométriques.

2^{nde} partie :

Effet du mouvement d'une touche du clavier sur le marteau associé

L'objectif de cette partie est d'obtenir la vitesse de l'extrémité du marteau en fonction de la vitesse de l'extrémité de la touche du clavier.

Le mouvement du marteau comporte en réalité trois phases mais seul sera étudié ici le mouvement initial, précédant la frappe de la corde. De même, le système d'étouffoir des cordes ne fait pas partie du modèle.



www.infovisual.info

Défini **figure 2**, le **schéma cinématique plan**, de normale $\vec{x} = \vec{x}_0$, comporte les solides rigides suivants :

- S_0 est le châssis du piano ;
- S_7 est la touche du clavier (sur laquelle agit le doigt du pianiste au point D), à laquelle est lié le repère $R_7 = (O_7, \vec{x}_7, \vec{y}_7, \vec{z}_7)$ tel que O_7 est fixe dans le plan (\vec{y}_0, \vec{z}_0) de l'étude ; on définit $\vec{O}_7\vec{H} = y_H \vec{y}_7 + z_H \vec{z}_7$ (y_H et z_H constantes positives) ;
- S_6 est le chevalet, auquel est lié le repère $R_6 = (O_6, \vec{x}_6, \vec{y}_6, \vec{z}_6)$ avec $\vec{O}_7\vec{O}_6 = y_6 \vec{y}_0 + z_6 \vec{z}_0$ (y_6 et $z_6 = z_H$ constantes positives) ; on définit $\vec{O}_6\vec{F} = -y_F \vec{y}_6 + z_F \vec{z}_6$ (y_F et z_F constantes positives) ;
- S_4 est le marteau, auquel est lié le repère $R_4 = (O_4, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$ tel que $\vec{O}_6\vec{O}_4 = z_4 \vec{z}_0$ (z_4 constante positive) ; on définit $\vec{O}_4\vec{E} = -y_E \vec{y}_4$ et $\vec{E}\vec{M} = z_M \vec{z}_4$ (y_E et z_M constantes positives), M étant le point qui frappe la corde ;
- S_5 est le levier d'échappement, auquel est lié le repère $R_5 = (E, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)$, tel que $\vec{F}\vec{E} = L\vec{z}_5$ (L constante positive).

Liaisons paramétrées :

- S_7 est en liaison pivot d'axe (O_7, \vec{x}) avec S_0 ; le paramètre du mouvement de R_7 par rapport à R_0 est $\varphi = (\vec{y}_0, \vec{y}_7)$;
- S_6 est en liaison pivot d'axe (O_6, \vec{x}) avec S_0 ; le paramètre du mouvement de R_6 par rapport à R_0 est $\gamma = (\vec{y}_0, \vec{y}_6)$;
- S_4 est en liaison pivot d'axe (O_4, \vec{x}) avec S_0 ; le paramètre du mouvement de R_4 par rapport à R_0 est $\delta = (\vec{y}_0, \vec{y}_4)$;
- S_5 est en liaison pivot d'axe (E, \vec{x}) avec S_4 ; le paramètre du mouvement de R_5 par rapport à R_4 est $\eta = (\vec{z}_4, \vec{z}_5)$.

Liaisons non paramétrées :

- S_5 est en liaison pivot d'axe (F, \vec{x}) avec S_6 ;
- S_7 est en liaison ponctuelle avec S_6 au point H (fixe dans S_7), liaison de normale \vec{z}_6 .

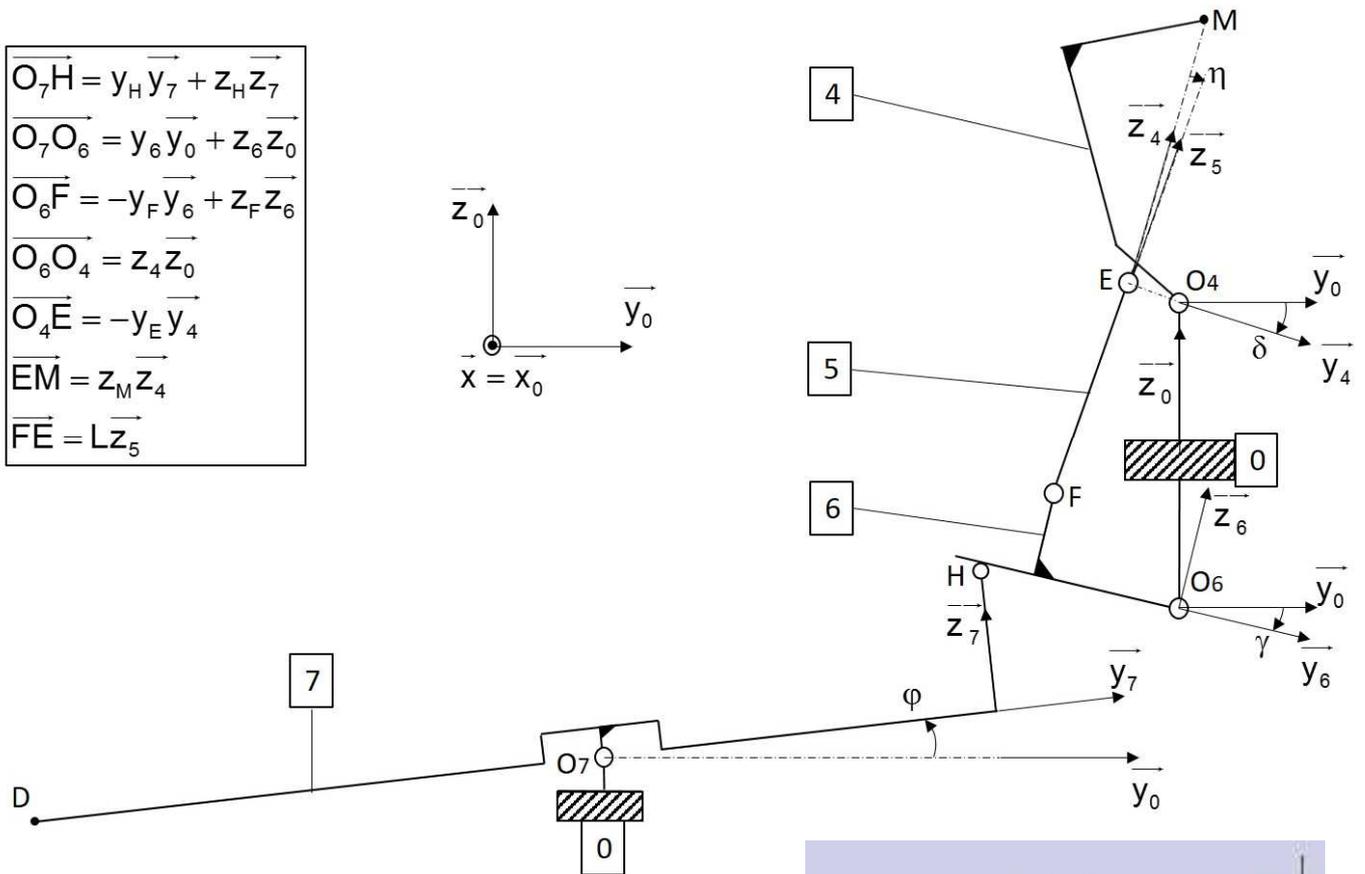
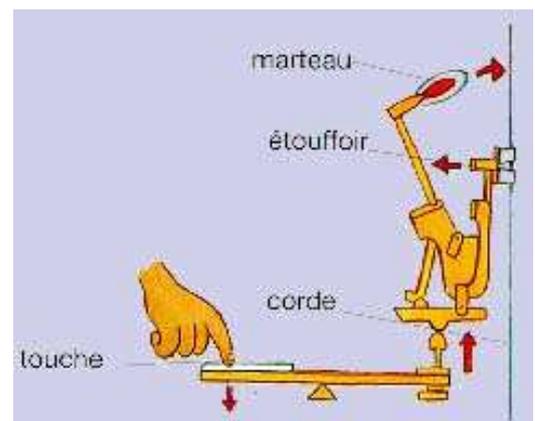


FIGURE 2

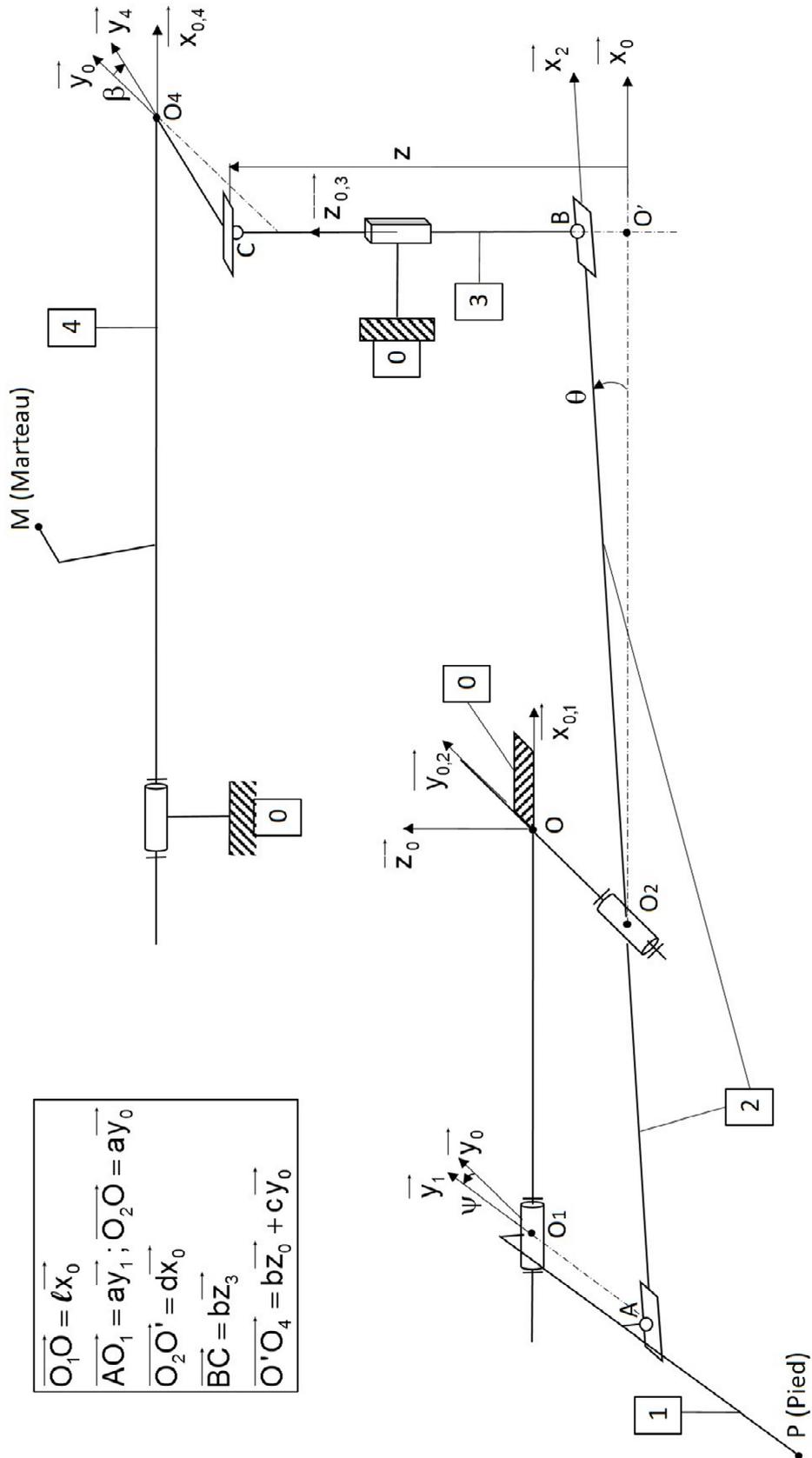


Questions :

- 1) Etablir le graphe des liaisons de ce mécanisme.
Tracer les figures de changement de base.
- 2) Donner les conditions de liaison.
Développer ces conditions de liaison et obtenir les équations de liaison entre paramètres du mouvement, SAUF pour l'équation résultant du contact en H que l'on ne redémontrera pas :

$$y_6 \sin \gamma - z_6 \cos \gamma - y_H \sin(\gamma - \varphi) + z_H \cos(\gamma - \varphi) = 0$$
 (on ne cherchera pas à résoudre ces équations).
Calculer le degré de mobilité.
- 3) Déterminer :
 - la vitesse du point F par rapport à R_0 , en s'appuyant obligatoirement sur les mouvements des solides S_5 et S_4 , de sorte à obtenir une expression en fonction des angles δ et η , de leurs dérivées par rapport au temps et des grandeurs géométriques.
 - l'accélération du point F par rapport à R_0 , en fonction des angles δ et η également, de leurs dérivées par rapport au temps et des grandeurs géométriques.
- 4) Cinématique graphique :
Toutes les constructions suivantes, effectuées sur la feuille-réponse, doivent être justifiées sur la feuille de copie.
 Les **figures 3 et 4 (feuille-réponse)** présentent la configuration dans laquelle les angles φ, γ, δ sont nuls (seul η n'est pas nul).
 - a. La vitesse du doigt (vitesse du point D par rapport à R_0) est donnée sur la figure 3.
Sur cette figure 3 :
 - tracer la vitesse du point H (fixe dans 7) par rapport à R_0 ;
 - tracer la vitesse de glissement en H.
 - b. La figure 4 présente un agrandissement de la partie centrale du mécanisme ; la vitesse de H dans le mouvement 6/0 est donnée.
Sur cette figure 4 :
 - tracer la vitesse du point F par rapport à R_0 ;
 - quel est le mouvement linéairement tangent au mouvement 5/0 ? placer le Centre Instantané de Rotation (CIR) I_{50} du mouvement 5/0 ;
 - tracer la vitesse du point E par rapport à R_0 .
 - c. Sur la figure 3 :
 - reporter la vitesse du point E par rapport à R_0 obtenue précédemment ; on considère que les vitesses sont à l'échelle 1 sur la figure 3 et à l'échelle 1,5 sur la figure 4.
 - tracer la vitesse du point M (marteau) par rapport à R_0 .
 - d. Grâce aux constructions, évaluer le rapport entre la norme de la vitesse de sortie (du point M par rapport à 0) et de celle de la vitesse d'entrée (du point D par rapport à 0) du mécanisme.

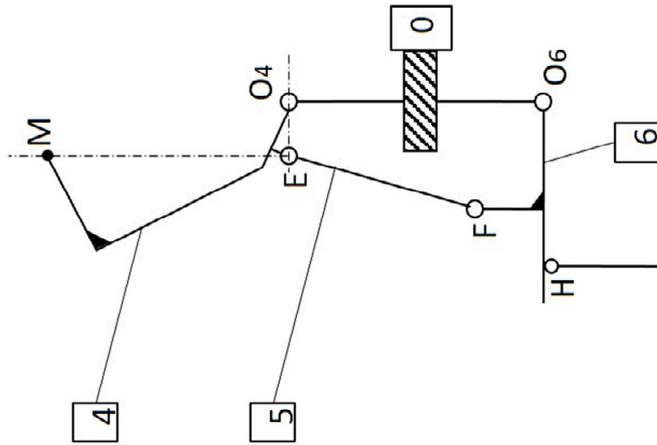
FIGURE 1



FEUILLE-REPONSE

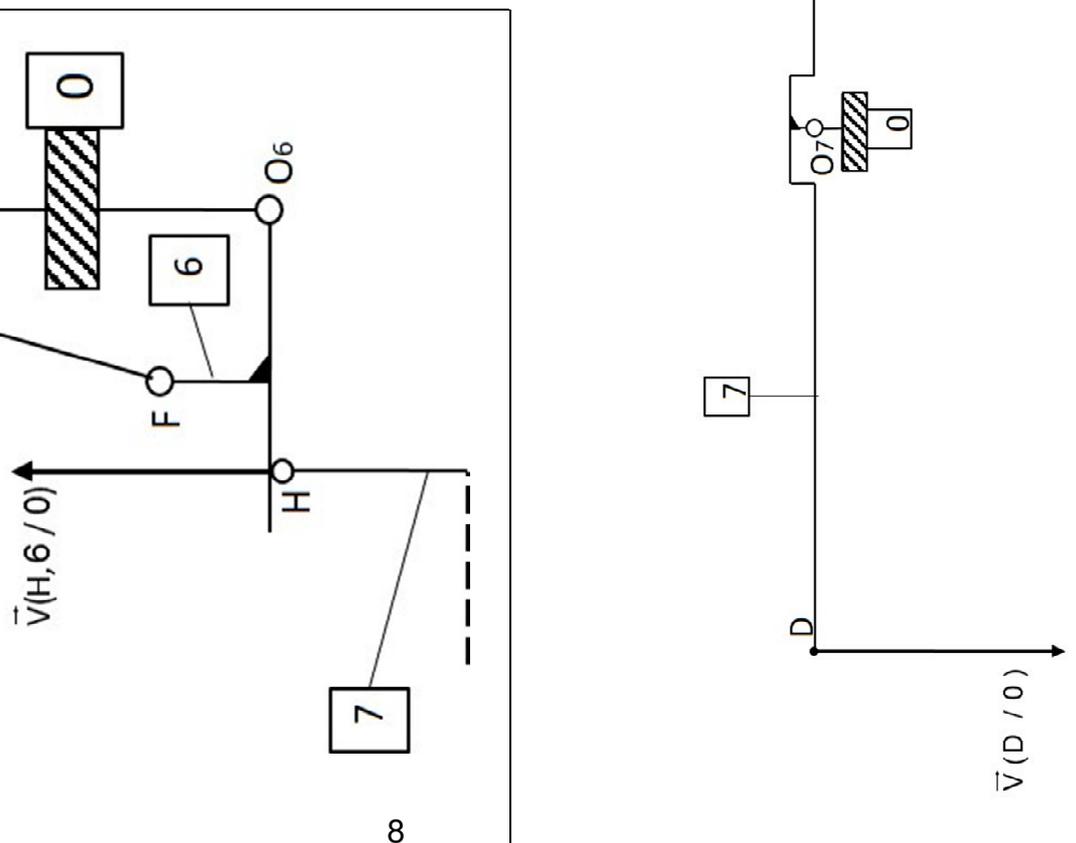
Nom :
Prénom :
Groupe :

FIGURE 3



Figures faites pour
 $\varphi = 0, \gamma = 0, \delta = 0$

FIGURE 4



8