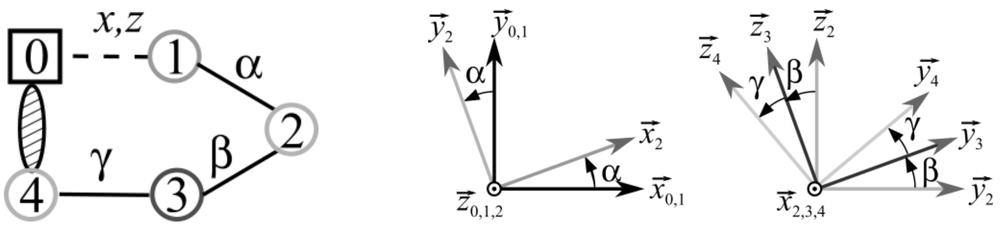
Etude cinématique d'un robot hexapode – Eléments de correction

1. Cinématique analytique

1.1 Tracer le graphe des liaisons et les figures de changement de bases.



1.2 Ecrire l'équation de liaison associée au contact ponctuel en C .

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}.\overrightarrow{z_0}=0$$

$$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}).\overrightarrow{z_0}=0$$

$$(x\overrightarrow{x_0}+z\overrightarrow{z_0}+a\overrightarrow{y_2}+b\overrightarrow{y_3}-c\overrightarrow{z_4}).\overrightarrow{z_{0,2}}=0$$

remarque $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\begin{pmatrix} x-[a+b\cos\beta+c\sin(\beta+\gamma)]\sin\alpha \\ [a+b\cos\beta+c\sin(\beta+\gamma)]\cos\alpha \\ z+b\sin\beta-c\cos(\beta+\gamma) \end{pmatrix}_0$

$$\boxed{z+b\sin\beta-c\cos(\beta+\gamma)=0 \quad (edl1)}$$

1.3 Ecrire les équations traduisant le non glissement du point C sur le plan $(\mathrm{O},\overrightarrow{x_{0,1}},\overrightarrow{y_{0,1}})$.

$\overrightarrow{V(\mathrm{C},4/0)}=\vec{0}$ on remarque que $\overrightarrow{V(\mathrm{C},4/0)}.\overrightarrow{z_0}=0$ est la dérivée de l'équation de contact, en effet seules les composantes dans le plan de normale $\overrightarrow{z_0}$ traduisent le non glissement.

$$\overrightarrow{V(\mathrm{C},4/0)}=\overrightarrow{V(\mathrm{C}/0)}=\frac{d}{dt}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\Big|_0$$

ou

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V(\mathrm{C},4/0)}&=\overrightarrow{V(\mathrm{C},4/3)}+\overrightarrow{V(\mathrm{C},3/2)}+\overrightarrow{V(\mathrm{C},2/1)}+\overrightarrow{V(\mathrm{C},1/0)}\\
&=\overrightarrow{V(\mathrm{B},4/3)}+\overrightarrow{\Omega_{4/3}}\wedge\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{V(\mathrm{A},3/2)}+\overrightarrow{\Omega_{3/2}}\wedge\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{V(\mathrm{P},2/1)}+\overrightarrow{\Omega_{2/1}}\wedge\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\dot{x}\overrightarrow{x_0}+\dot{z}\overrightarrow{z_0}\\
&=\vec{0}+\dot{\gamma}\overrightarrow{x_4}\wedge-c\overrightarrow{z_4}+\vec{0}+\dot{\beta}\overrightarrow{x_{3,4}}\wedge(b\overrightarrow{y_3}-c\overrightarrow{z_4})+\vec{0}+\dot{\alpha}\overrightarrow{z_2}\wedge(a\overrightarrow{y_2}+b\overrightarrow{y_3}-c\overrightarrow{z_4})+\dot{x}\overrightarrow{x_0}+\dot{z}\overrightarrow{z_0}\\
&=c\dot{\gamma}\overrightarrow{y_4}+b\dot{\beta}\overrightarrow{z_3}+c\dot{\beta}\overrightarrow{y_4}+[-a-b\cos\beta-c\sin(\beta+\gamma)]\dot{\alpha}\overrightarrow{x_2}+\dot{x}\overrightarrow{x_0}+\dot{z}\overrightarrow{z_0}\end{aligned}$$

En projection sur la base 2, on a $\overrightarrow{V(\mathrm{C},4/0)}=\begin{pmatrix} \dot{x}\cos\alpha-[a+b\cos\beta+c\sin(\beta+\gamma)]\dot{\alpha} \\ -\dot{x}\sin\alpha-b\dot{\beta}\sin\beta+c(\dot{\beta}+\dot{\gamma})\cos(\beta+\gamma) \\ \dot{z}+b\dot{\beta}\cos\beta+c(\dot{\beta}+\dot{\gamma})\sin(\beta+\gamma) \end{pmatrix}_2$

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{x}\cos\alpha-[a+b\cos\beta+c\sin(\beta+\gamma)]\dot{\alpha}=0 \quad (edl2)\\ -\dot{x}\sin\alpha-b\dot{\beta}\sin\beta+c(\dot{\beta}+\dot{\gamma})\cos(\beta+\gamma)=0 \quad (edl3)\end{aligned}}$$

Remarque : on peut aussi projeter en base 0 :

$$\overrightarrow{V(\mathrm{C},4/0)}=\begin{pmatrix} \dot{x}-[a+b\cos\beta+c\sin(\beta+\gamma)]\dot{\alpha}\cos\alpha-[-b\dot{\beta}\sin\beta+c(\dot{\beta}+\dot{\gamma})\cos(\beta+\gamma)]\sin\alpha \\ 0-[a+b\cos\beta+c\sin(\beta+\gamma)]\dot{\alpha}\sin\alpha+[-b\dot{\beta}\sin\beta+c(\dot{\beta}+\dot{\gamma})\cos(\beta+\gamma)]\cos\alpha \\ \dot{z}+b\dot{\beta}\cos\beta+c(\dot{\beta}+\dot{\gamma})\sin(\beta+\gamma) \end{pmatrix}_0$$

1.4 Calculer le degré de mobilité.

5 paramètres $(x,z,\alpha,\beta,\gamma)$ - 3 équations $(edl1, edl2, edl3)$ = 2

1.5 Donner les vecteurs roulement et pivotement au point de contact C.

$$\overrightarrow{P_{4/0}(\mathrm{C})} = (\overrightarrow{\Omega_{4/0}}.\overrightarrow{z_0})\overrightarrow{z_0} = [(\dot{\alpha}\overrightarrow{z_{0,2}} + (\dot{\beta}+\dot{\gamma})\overrightarrow{x_2}).\overrightarrow{z_{0,2}}]\overrightarrow{z_0} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{P_{4/0}(\mathrm{C})} = \dot{\alpha}\overrightarrow{z_{0,2}}}$$

$$\overrightarrow{R_{4/0}(\mathrm{C})} = \overrightarrow{\Omega_{4/0}} - \overrightarrow{P_{4/0}(\mathrm{C})} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{R_{4/0}(\mathrm{C})} = (\dot{\beta}+\dot{\gamma})\overrightarrow{x_2}}$$

1.6 Calculer la vitesse $\overrightarrow{V(\mathrm{B}/1)}$ puis l'accélération $\overrightarrow{A(\mathrm{B}/1)}$.

$$\overrightarrow{V(\mathrm{B}/1)} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{\mathrm{PB}}\Big|_1 = \frac{d}{dt}(a\overrightarrow{y_2} + b\overrightarrow{y_3})\Big|_1 = \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \wedge a\overrightarrow{y_2} + \overrightarrow{\Omega_{3/1}} \wedge b\overrightarrow{y_3} = \dot{\alpha}\overrightarrow{z_2} \wedge a\overrightarrow{y_2} + (\dot{\alpha}\overrightarrow{z_2} + \dot{\beta}\overrightarrow{x_{2,3}}) \wedge b\overrightarrow{y_3}$$

ou

$$\overrightarrow{V(\mathrm{B}/1)} = \overrightarrow{V(\mathrm{B},3/1)} = \overrightarrow{V(\mathrm{B},3/2)} + \overrightarrow{V(\mathrm{B},2/1)} = \overrightarrow{V(\mathrm{A},3/2)} + \overrightarrow{\Omega_{3/2}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{V(\mathrm{P},2/1)} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \wedge (\overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}})$$

$$\boxed{\overrightarrow{V(\mathrm{B}/1)} = (-a\dot{\alpha} - b\cos\beta\dot{\alpha})\overrightarrow{x_{2,3}} + b\dot{\beta}\overrightarrow{z_3}}$$

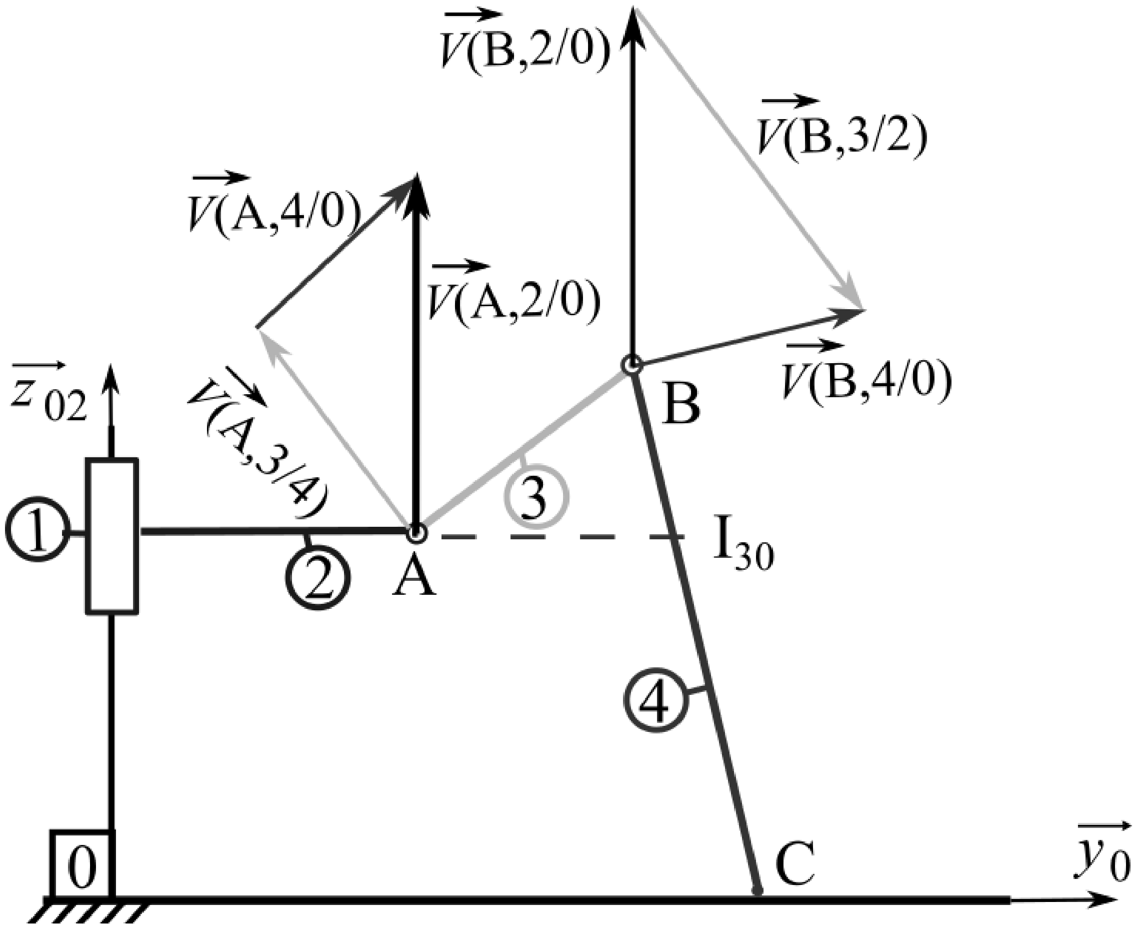
$$\overrightarrow{A(\mathrm{B}/1)} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{V(\mathrm{B}/1)}\Big|_1 = \frac{d}{dt}(-(a+b\cos\beta)\dot{\alpha}\overrightarrow{x_2} + b\dot{\beta}\overrightarrow{z_3})\Big|_1$$

$$= [b\dot{\beta}\sin\beta\dot{\alpha} - (a+b\cos\beta)\ddot{\alpha}]\overrightarrow{x_2} + \dot{\alpha}\overrightarrow{z_2} \wedge -(a+b\cos\beta)\dot{\alpha}\overrightarrow{x_2} + b\ddot{\beta}\overrightarrow{z_3} + (\dot{\alpha}\overrightarrow{z_2} + \dot{\beta}\overrightarrow{x_{2,3}}) \wedge b\dot{\beta}\overrightarrow{z_3}$$

$$= [b\dot{\beta}\sin\beta\dot{\alpha} - (a+b\cos\beta)\ddot{\alpha}]\overrightarrow{x_2} - (a+b\cos\beta)\dot{\alpha}^2\overrightarrow{y_2} + b\ddot{\beta}\overrightarrow{z_3} + b\dot{\beta}\sin\beta\dot{\alpha}\overrightarrow{x_{2,3}} - b\dot{\beta}^2\overrightarrow{y_3}$$

$$\boxed{\overrightarrow{A(\mathrm{B}/1)} = [2b\dot{\beta}\sin\beta\dot{\alpha} - (a+b\cos\beta)\ddot{\alpha}]\overrightarrow{x_{2,3}} - (a+b\cos\beta)\dot{\alpha}^2\overrightarrow{y_2} - b\dot{\beta}^2\overrightarrow{y_3} + b\ddot{\beta}\overrightarrow{z_3}}$$

2. Cinématique graphique d'un mouvement dans le plan transverse



2.1 Préciser la nature du mouvement 2/0 puis tracer la vitesse $\overrightarrow{V(\mathrm{B},2/0)}$.

$\boxed{\text{2/0 est une translation rectiligne de direction } \overrightarrow{z_0}}$ car il n'y a pas de rotation entre 2 et 0, α étant nul.

Translation $\Rightarrow \overrightarrow{V(\mathrm{B},2/0)} = \overrightarrow{V(\mathrm{A},2/0)}$

2.2 Préciser la nature du mouvement 3/2.

$\boxed{\text{3/2 est une rotation d'axe } (\mathrm{A},\overrightarrow{x_{2,3}})}$ car la liaison 3/2 est un pivot d'axe $(\mathrm{A},\overrightarrow{x_{2,3}})$.

2.3 Tracer les vitesses $\overrightarrow{V(\mathrm{B},4/0)}$ et $\overrightarrow{V(\mathrm{B},3/2)}$.

Par composition des mouvements, $\overrightarrow{V(\mathrm{B},2/0)} = \overrightarrow{V(\mathrm{B},4/0)} - \overrightarrow{V(\mathrm{B},3/2)}$ car $\overrightarrow{V(\mathrm{B},4/3)} = \vec{0}$

4/0 rotation d'axe $(\mathrm{C},\overrightarrow{x_{0,4}}) \Rightarrow \overrightarrow{V(\mathrm{B},4/0)} \perp (\mathrm{BC})$ et 3/2 rotation d'axe $(\mathrm{A},\overrightarrow{x_{2,3}}) \Rightarrow \overrightarrow{V(\mathrm{B},3/2)} \perp (\mathrm{AB})$

2.4 Positionner I_{30} le centre instantané de rotation du mouvement de 3/0.

$\boxed{\mathrm{I}_{30} \text{ intersection de } (\mathrm{A}\vec{y}_0) \text{ et } (\mathrm{BC})}$ car $\overrightarrow{V(\mathrm{A},3/0)} \perp (\mathrm{A}\vec{y}_0)$ et $\overrightarrow{V(\mathrm{B},3/0)} \perp (\mathrm{BC})$.

2.5 Tracer la vitesse $\overrightarrow{V(\mathrm{A},3/4)}$.

Par composition des mouvements, $\overrightarrow{V(\mathrm{A},3/4)} = \overrightarrow{V(\mathrm{A},2/0)} - \overrightarrow{V(\mathrm{A},4/0)}$ car $\overrightarrow{V(\mathrm{A},3/2)} = \vec{0}$

3/4 rotation d'axe $(\mathrm{B},\overrightarrow{x_{3,4}}) \Rightarrow \overrightarrow{V(\mathrm{A},3/4)} \perp (\mathrm{AB})$ et 4/0 rotation d'axe $(\mathrm{C},\overrightarrow{x_{0,4}}) \Rightarrow \overrightarrow{V(\mathrm{A},4/0)} \perp (\mathrm{AC})$

2.6 Donner la relation analytique entre $\omega_{32} = \left\|\overrightarrow{\Omega_{3/2}}\right\|$, $\left\|\overrightarrow{V(\mathrm{B},3/2)}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\|$.

$\boxed{\omega_{32} = \left\|\overrightarrow{\Omega_{3/2}}\right\| = \dfrac{\left\|\overrightarrow{V(\mathrm{B},3/2)}\right\|}{\left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\|}}$ car $\overrightarrow{V(\mathrm{B},3/2)} = \overrightarrow{V(\mathrm{A},3/2)} + \overrightarrow{\Omega_{3/2}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AB}}$

2.7 En déduire, à partir des tracés effectués, la valeur de ω_{34} pour ω_{32} = 30 tr/min ?

D'après les tracés $\boxed{\dfrac{\omega_{34}}{\omega_{32}} = \dfrac{\left\|\overrightarrow{V(\mathrm{A},3/4)}\right\|}{\left\|\overrightarrow{V(\mathrm{B},3/2)}\right\|} \approx 0,7}$. Donc $\boxed{\omega_{34} \approx 21 \text{ tr/min}}$

3. Cinématique du réducteur intégré au moteur

3.1 Traduire les conditions de non glissement aux points I et J et développer les équations associées.

Remarque : les points géométriques de contact I et J sont fixes dans 0

$$\overrightarrow{V(\mathrm{I},2/1)} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\Omega_{2/0}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{O}_{2a}\mathrm{I}} - \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{O}_1\mathrm{I}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \dot{\psi}_2 \overrightarrow{z_0} \wedge -R_{2a}\overrightarrow{y_0} - \dot{\psi}_1 \overrightarrow{z_0} \wedge R_1 \overrightarrow{y_0} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad R_{2a}\dot{\psi}_2 + R_1\dot{\psi}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\dot{\psi}_2}{\dot{\psi}_1} = -\frac{R_1}{R_{2a}}}$$

De même, $\overrightarrow{V(\mathrm{J},3/2)} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\dfrac{\dot{\psi}_3}{\dot{\psi}_2} = -\dfrac{R_{2b}}{R_3}}$

3.2 En déduire le rapport de réduction $\Rightarrow \boxed{r = \dfrac{\dot{\psi}_3}{\dot{\psi}_1} = \dfrac{R_{2b}}{R_3}\dfrac{R_1}{R_{2a}}}$

3.3 Donner la nature des mouvements instantanés 2/1 et 3/2.

$\boxed{\text{2/1 et 3/2 sont des mouvements linéaires tangents à une rotation d'axes respectifs } (\mathrm{I},\vec{z}) \text{ et } (\mathrm{J},\vec{z})}$

3.4 $\boxed{\overrightarrow{A(\mathrm{J}/0)} = \vec{0}}$ car J fixe dans 0.