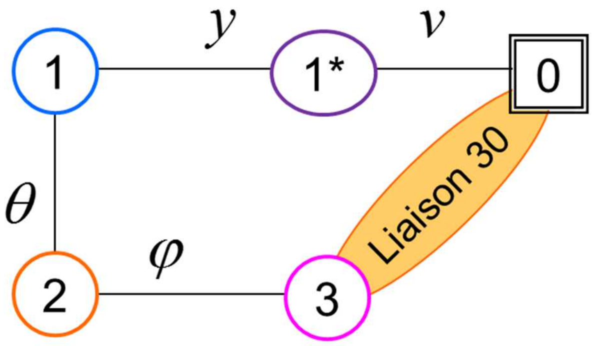
INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

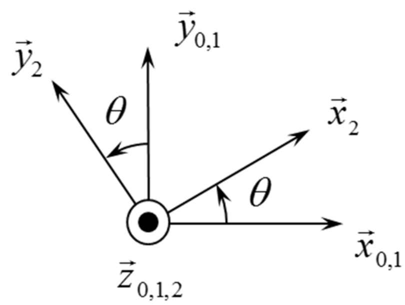
Lundi 13 Juin 2022

EFS de Mécanique des systèmes – Shimmy d'une roue d'avion
Correction

1 - ***Cinématique***

Q 1 - **Graphe des liaisons et figure de changement de base 1/2.**





Q 2 - **Equation de liaison géométrique**

Contact en I : $\overrightarrow{O_0 I}.\vec{z}_0 = 0$ $\boxed{R = d}$

cette équation ne fait apparaitre aucun paramètre de mouvement, elle ne modifie donc pas la mobilité du mécanisme et n'est donc par incluse dans les bilans inconnus / équations. Il s'agit d'une équation de montage.

Q 3 - **Equation de liaison cinématique**

Non glissement longitudinal en I : $\vec{V}(I,3/0).\vec{x}_2 = 0$ $\boxed{v\cos\theta + \dot{y}\sin\theta - R\dot{\varphi} = 0}$

Avec : $\vec{V}(I,3/0) = \vec{V}(O_3/0) + \overrightarrow{IO_3} \wedge \vec{\Omega}(3/0)$ et $\vec{V}(O_3/0) = \vec{V}(O_1/0) + \overrightarrow{O_3O_1} \wedge \vec{\Omega}(2/0)$

Soit : $\vec{V}(I,3/0) = v\,\vec{x}_0 + \dot{y}\,\vec{y}_0 - \ell\dot{\theta}\,\vec{y}_2 - R\dot{\varphi}\,\vec{x}_2$

Q 4 - **Angle de dérive**

L'expression fournie, permet d'écrire : $\boxed{\delta = \arctan\left(\dfrac{\vec{V}(I/0).\vec{y}_2}{\vec{V}(I/0).\vec{x}_2}\right) = \arctan\left(\dfrac{\dot{y}\cos\theta - v\sin\theta - \ell\dot{\theta}}{\dot{y}\sin\theta + v\cos\theta}\right)}$

Car : $\vec{V}(I/0) = \vec{V}(I,2/0) = v\,\vec{x}_0 + \dot{y}\,\vec{y}_0 - \ell\dot{\theta}\,\vec{y}_2$

2 - ***Cinétique***

Q 5 - **Torseur dynamique galiléen de S_1 en O_1.**

Le solide S_1 étant de masse négligeable nous savons directement :

Résultante dynamique : $\boxed{\vec{D}(S_1/0) = m_1\,\vec{A}(G_1/0) = \vec{0}}$

Moment dynamique en O_1 : $\boxed{\vec{\delta}(O_1, S_1/0) = \vec{\delta}(G_1, S_1/0) = \vec{0}}$

Q 6 - Torseur cinétique galiléen de S2 en G_2 :

Résultante cinétique : $\boxed{\vec{P}(S_2/0)=m_2\vec{V}(G_2/0)=m_2\left(v\,\vec{x}_0+\dot{y}\,\vec{y}_0-a\,\dot{\theta}\,\vec{y}_2\right)}$

Car :

$$\vec{V}(G_2/0)=\vec{V}(O_1/0)+\overrightarrow{G_2O_1}\wedge\vec{\Omega}(2/0)=m_2\left(v\,\vec{x}_0+\dot{y}\,\vec{y}_0+a\,\vec{x}_2\wedge\dot{\theta}\,\vec{z}_{0,1,2}\right)$$
$$=m_2\left(v\,\vec{x}_0+\dot{y}\,\vec{y}_0-a\,\dot{\theta}\,\vec{y}_2\right)$$

Ou, si l'on remarque que **R1* est également galiléen** : $\boxed{\vec{P}(S_2/1^*)=m_2\vec{V}(G_2/1^*)=m_2\left(\dot{y}\,\vec{y}_0-a\,\dot{\theta}\,\vec{y}_2\right)}$

Moment cinétique en G_2 :

$$\boxed{\vec{\sigma}(G_2,S_2/0)=\overline{\overline{I}}(G_2,S_2)\,\vec{\Omega}(2/0)=\begin{pmatrix}-E_2\,\dot{\theta}\\0\\C_2\,\dot{\theta}\end{pmatrix}_2}$$

Q 7 - Torseur dynamique galiléen de S2 en G_2 puis en O_1 :

Résultante dynamique : $\boxed{\vec{D}(S_2/0)=m_2\vec{A}(G_2/0)=m_2\left(\ddot{y}\,\vec{y}_0-a\,\ddot{\theta}\,\vec{y}_2+a\,\dot{\theta}^2\vec{x}_2\right)}$

Moment dynamique en G_2 :

$$\vec{\delta}(G_2,S_2/0)=\left.\frac{d\vec{\sigma}(G_2,S_2/0)}{dt}\right|_0=\left.\frac{d\vec{\sigma}(G_2,S_2/0)}{dt}\right|_2+\vec{\Omega}(2/0)\wedge\vec{\sigma}(G_2,S_2/0)$$

Soit :

$$\boxed{\vec{\delta}(G_2,S_2/0)\begin{pmatrix}-E_2\,\ddot{\theta}\\-E_2\,\dot{\theta}^2\\C_2\,\ddot{\theta}\end{pmatrix}_2}$$

Moment dynamique en O_1 : $\vec{\delta}(O_1,S_2/0)=\vec{\delta}(G_2,S_2/0)+\overrightarrow{O_1G_2}\wedge\vec{D}(S_2/0)$

Soit :

$$\boxed{\vec{\delta}(O_1,S_2/0)=\begin{pmatrix}-E_2\,\ddot{\theta}\\-E_2\,\dot{\theta}^2\\C_2\,\ddot{\theta}\end{pmatrix}_2+\begin{pmatrix}-a\\0\\0\end{pmatrix}_2\wedge m_2\begin{pmatrix}a\,\dot{\theta}^2+\ddot{y}\sin\theta\\-a\,\ddot{\theta}+\ddot{y}\cos\theta\\0\end{pmatrix}_2=\begin{pmatrix}-E_2\,\ddot{\theta}\\-E_2\,\dot{\theta}^2\\\left(C_2+m_2\,a^2\right)\ddot{\theta}-m_2\,a\ddot{y}\cos\theta\end{pmatrix}_2}$$

Q 8 - Torseur dynamique galiléen de S3 en O_3 puis en O_1

Moment cinétique en O_3 :

$$\vec{\sigma}(O_3,S_3/0)=\overline{\overline{I}}(O_3,S_3)\,\vec{\Omega}(3/0)=\begin{pmatrix}A_3&0&0\\0&B_3&0\\0&0&A_3\end{pmatrix}_{3,2}\begin{pmatrix}0\\\dot{\varphi}\\\dot{\theta}\end{pmatrix}_2=\begin{pmatrix}0\\B_3\,\dot{\varphi}\\A_3\,\dot{\theta}\end{pmatrix}_2$$

Moment dynamique en O_3 :

$$\vec{\delta}(O_3,S_3/0)=\left.\frac{d\vec{\sigma}(O_3,S_3/0)}{dt}\right|_0=\left.\frac{d\vec{\sigma}(O_3,S_3/0)}{dt}\right|_2+\vec{\Omega}(2/0)\wedge\vec{\sigma}(O_3,S_3/0)$$

Soit :

$$\boxed{\vec{\delta}(O_3,S_3/0)=\begin{pmatrix}-B_3\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi}\\B_3\,\ddot{\varphi}\\A_3\,\ddot{\theta}\end{pmatrix}_2}$$

Moment dynamique en O_1 : $\vec{\delta}\left(O_1,S_3/0\right)=\vec{\delta}\left(O_3,S_3/0\right)+\overrightarrow{O_1O_3}\wedge\vec{D}\left(S_3/0\right)$

$$\boxed{\vec{\delta}\left(O_1,S_3/0\right)=\begin{pmatrix}-B_3\,\dot{\theta}\dot{\varphi}\\ B_3\,\ddot{\varphi}\\ \left(A_3+m_3\,\ell^2\right)\ddot{\theta}-m_3\,\ell\,\ddot{y}\cos\theta\end{pmatrix}_2}$$

Car ; $\boxed{\vec{D}\left(S_3/0\right)=m_3\,\vec{A}\left(O_3/0\right)=m_3\left(\ddot{y}\,\vec{y}_0-\ell\,\ddot{\theta}\,\vec{y}_2+\ell\,\dot{\theta}^2\vec{x}_2\right)}$

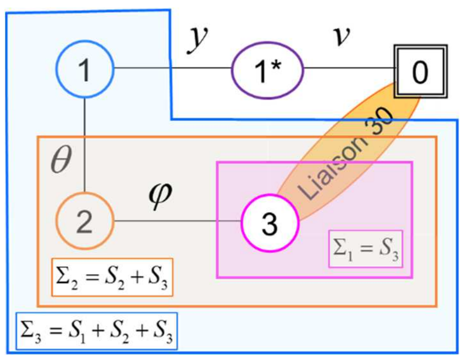
3 - ***Dynamique***

Q 9 - Bilan complet inconnues / équations.

Inconnues	S	Equations	S
Cinématique : y , θ , φ Mobilité : $m=p-r=2$	3	Equations de liaisons Géométriques Cinématique	 - 1
Dynamique : 1 glissière 2 pivots : 1 ressort et 1 amortisseur 1 contact pneumatique / piste	 5 10 2 4 (3)	PFD : 3 solides	18
		Lois de comportement : Ressort et amortisseur Pneumatique à (Z03 connu)	 2 3 (2)
	24 (23)	Isodynamique	24 (23)

Système minimum d'équation permettant d'obtenir les équations de mouvement

- Equations de liaison cinématique : E_1
- Lois de comportements : E_2 à E_6
- TMD à $\Sigma_1=S_3\ /\ (O_3,\vec{y}_{2,3})$: E_7
- TMD à $\Sigma_2=S_2+S_3\ /\ (O_1,\vec{z}_{0,1,2})$: E_8
- TRD à $\Sigma_3=S_1+S_2+S_3\ /\ \vec{y}_{0,1}$: E_9



Système minimum de 9 équations à 9 inconnues $(y,\theta,\varphi,F_R,M_A,X_{03},Y_{03},Z_{03},N_{03})$

Q 10 - Mise en équation.

Equations de liaison : Contact en I : $\overrightarrow{OI}.\vec{z}_0=0$ $\boxed{R=d}$ équation de montage.

Non glissement longitudinal en I : $\vec{V}\left(I,3/0\right).\vec{x}_2=0$ $\boxed{v\cos\theta+\dot{y}\sin\theta-R\dot{\varphi}=0}$

Lois de comportement :

Ressort : $\vec{R}_{\text{Rst}/1}=F_R\,\vec{y}_{0,1}$ avec $\boxed{F_R=-k\,y}$

Amortisseur : $\vec{M}_{Amr/2}(O_1)=M_A\,\vec{z}_{0,1,2}$ avec $\boxed{M_A=-b\,\dot{\theta}}$

Pneumatique :

L'effort transversal et le moment d'auto-alignement sont, quant à eux, liés à l'angle de dérive par :

$\boxed{Y_{03} = -D\,\delta}$ et $\boxed{N_{03} = A_0\,\delta}$ avec : $\boxed{\delta = \text{Arctan}\left(\dfrac{\dot{y}\cos\theta - v\sin\theta - \ell\,\dot{\theta}}{\dot{y}\sin\theta + v\cos\theta}\right)}$

TMD à $\underline{\Sigma_1 = S_3}\,/\,\underline{(O_3, \vec{y}_{2,3})}$ **:** $\vec{\delta}(O_3, S_3/0).\vec{y}_{2,3} = \vec{M}_{Ext/3}(O_3).\vec{y}_{2,3}$

Cinétique : $\vec{\delta}\left(O_3, S_3/0\right).\vec{y}_{2,3} = B_3\,\ddot{\varphi}$ calculé précédemment

BAME / S3 :

- Poids : $\vec{M}_{Poids/3}(O_3) = \vec{0}$ car O_3 est le centre de masse de S3
- Liaison 2/3 : telle que : $\vec{M}_{2/3}(O_3).\vec{y}_{2,3} = 0$
- Liaison 0/3 : $\vec{M}_{0/3}(O_3) = \vec{M}_{0/3}(I) + \overrightarrow{O_3 I} \wedge \vec{R}_{0/3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ N_{03} \end{pmatrix}_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{pmatrix}_{2,0} \wedge \begin{pmatrix} X_{03} \\ Y_{03} \\ Z_{03} \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} RY_{03} \\ -R\,X_{03} \\ N_{03} \end{pmatrix}_2$

Mise en équation : $\boxed{B_3\,\ddot{\varphi} = -R\,X_{03}}$

TMD à $\underline{\Sigma_2 = S_2 + S_3}\,/\,\underline{(O_1, \vec{z}_{0,1,2})}$ **:** $\vec{\delta}(O_1, S_2 + S_3/0).\vec{z}_{0,1,2} = \vec{M}_{Ext/\{S_2+S_3\}}(O_1).\vec{z}_{0,1,2}$

Cinétique : $\vec{\delta}\left(O_1, S_3/0\right).\vec{z}_{0,1,2} = \left(A_3 + m_3\,\ell^2\right)\ddot{\theta} - m_3\,\ell\,\ddot{y}\cos\theta$ calculé précédemment

$\vec{\delta}\left(O_1, S_2/0\right).\vec{z}_{0,1,2} = \left(C_2 + m_2\,a^2\right)\ddot{\theta} - m_2\,a\,\ddot{y}\cos\theta$ calculé précédemment

BAME / { S2+S3 } :

- Poids : $\vec{M}_{Poids/2}(O_1) = \overrightarrow{O_1 G_2} \wedge \vec{R}_{Poids/2} = -a\,\vec{x}_2 \wedge -m_2\,g\,\vec{z}_{0,1,2} = -m_2\,g\,a\,\vec{y}_2$

  $\vec{M}_{Poids/3}(O_1) = \overrightarrow{O_1 O_3} \wedge \vec{R}_{Poids/3} = -\ell\,\vec{x}_2 \wedge -m_3\,g\,\vec{z}_{0,1,2} = -m_3\,g\,\ell\,\vec{y}_2$
- Liaison 1/2 : telle que : $\vec{M}_{1/2}(O_1).\vec{z}_{0,1,2} = 0$
- Amortisseur : $\vec{M}_{Amr/2}(O_1) = M_A\,\vec{z}_{0,1,2} = -b\,\dot{\theta}\,\vec{z}_{0,1,2}$
- Liaison 0/3 : $\vec{M}_{0/3}(O_1) = \vec{M}_{0/3}(I) + \overrightarrow{O_1 I} \wedge \vec{R}_{0/3} = \begin{pmatrix} RY_{03} \\ -R\,X_{03} + \ell\,Z_{03} \\ N_{03} - \ell\,Y_{03} \end{pmatrix}_2$

  Avec : $\overrightarrow{O_1 I} = -\ell\,\vec{x}_2 - R\,\vec{z}_{0,1,2}$

Mise en équation :

$$\boxed{\left(C_2 + A_3 + m_2\,a^2 + m_3\,\ell^2\right)\ddot{\theta} - \left(m_3\,\ell + m_2\,a\right)\ddot{y}\cos\theta = -b\,\dot{\theta} + N_{03} - \ell\,Y_{03}}$$

TRD à $\Sigma_3 = S_1 + S_2 + S_3$ / $\vec{y}_{0,1}$: $\vec{D}(S_1+S_2+S_3/0).\vec{y}_{0,1} = \vec{R}_{Ext/\{S_1+S_2+S_3\}}(O_1).\vec{y}_{0,1}$

Cinétique : $\vec{D}(S_1/0) = \vec{0}$ Car S1 de masse négligeable

$$\vec{D}(S_2/0).\vec{y}_{0,1} = m_2\,\ddot{y} + m_2 a\left(\dot{\theta}^2 \sin\theta - \ddot{\theta}\cos\theta\right)$$

$$\vec{D}(S_3/0).\vec{y}_{0,1} = m_3\,\ddot{y} + m_3\,\ell\left(\dot{\theta}^2 \sin\theta - \ddot{\theta}\cos\theta\right)$$

BAME / { S1+S2+S3 } :

- Poids : $\vec{R}_{Poids/S_i} \perp \vec{y}_{0,1}$ et masse de S1 négligée
- Liaison 1*/1 : telle que : $\vec{R}_{1*/1}.\vec{y}_{0,1} = 0$
- Ressort / 1 : $\vec{R}_{Rst/1} = F_R\,\vec{y}_{0,1} = -k\,y\,\vec{y}_{0,1}$
- Liaison 0/3 : $\vec{R}_{0/3}.\vec{y}_{0,1} = X_{03}\sin\theta + Y_{03}\cos\theta$

Mise en équation : $\boxed{(m_2+m_3)\ddot{y} + (m_2 a + m_3\ell)\left(\dot{\theta}^2\sin\theta - \ddot{\theta}\cos\theta\right) = -k\,y + X_{03}\sin\theta + Y_{03}\cos\theta}$

Q 11 - **Position stationnaire :**

En injectant les conditions $y_S = 0$, $\theta_S = 0$ et $\dot{\varphi} = \omega_S = Cste$ dans les équations nous obtenons :

Non glissement longitudinal en I : $\boxed{\dot{\varphi} = \omega_S = \frac{v}{R}}$

Lois de comportement : $\boxed{F_{RS} = 0}$ $\boxed{M_{AS} = 0}$ $\boxed{\delta_S = 0}$ $\boxed{Y_{03S} = 0}$ $\boxed{N_{03S} = 0}$

TMD à $\Sigma_1 = S_3$ / $(O_3, \vec{y}_{2,3})$: $\boxed{X_{03S} = 0}$

TMD à $\Sigma_2 = S_2 + S_3$ / $(O_1, \vec{z}_{0,1,2})$: $\boxed{0 = 0}$

TMD à $\Sigma_2 = S_2 + S_3$ / $(O_1, \vec{z}_{0,1,2})$: $\boxed{0 = 0}$

Ce qui montre la position définie précédemment est bien solution des équations.

Q 12 - **Petits mouvements au voisinage de la position stationnaire.**

Dans le contexte où $y = \overline{y}$ et $\theta = \overline{\theta}$ avec $\overline{y}$ et $\overline{\theta}$ (ainsi que leurs dérivées temporelles) petits, nous pouvons linéariser les équations du système minimum.

l'équation traduisant le non glissement longitudinal en I devient : $\boxed{\dot{\varphi} = \omega_S = \frac{v}{R}}$

car nous pouvons écrire : $v\cos\theta + \dot{y}\sin\theta \approx v$

L'angle de dérive devient : $\delta = \arctan\left(\dfrac{\dot{y}\cos\theta - v\sin\theta - \ell\dot{\theta}}{\dot{y}\sin\theta + v\cos\theta}\right) \approx \dfrac{\dot{\overline{y}} - \ell\dot{\overline{\theta}}}{v} - \overline{\theta}$

Ce qui permet d'exprimer les efforts : $\boxed{Y_{03} = -D\left(\dfrac{\dot{\bar{y}} - \ell\dot{\bar{\theta}}}{v} - \bar{\theta}\right)}$ et $\boxed{N_{03} = A_0\left(\dfrac{\dot{\bar{y}} - \ell\dot{\bar{\theta}}}{v} - \bar{\theta}\right)}$

L'équation issue du TMD à $\Sigma_1 = S_3 \,/\, (O_3, \vec{y}_{2,3})$ devient : $\boxed{X_{03} = 0}$

L'équation issue du TMD à $\Sigma_2 = S_2 + S_3 \,/\, (O_1, \vec{z}_{0,1,2})$ devient, en négligeant A_0 devant ℓD :

$$\left(C_2 + A_3 + m_2\, a^2 + m_3\, \ell^2\right)\ddot{\bar{\theta}} - \left(m_3\,\ell + m_2\, a\right)\ddot{\bar{y}} = -b\,\dot{\bar{\theta}} + \ell\, D\left(\frac{\dot{\bar{y}} - \ell\dot{\bar{\theta}}}{v} - \bar{\theta}\right)$$

L'équation issue du TMD à $\Sigma_2 = S_2 + S_3 \,/\, (O_1, \vec{z}_{0,1,2})$ devient :

$$\left(m_2 + m_3\right)\ddot{\bar{y}} - \left(m_2 a + m_3 \ell\right)\ddot{\bar{\theta}} = -k\,\bar{y} - D\left(\frac{\dot{\bar{y}} - \ell\dot{\bar{\theta}}}{v} - \bar{\theta}\right)$$

Ce qui permet d'écrire le système différentiel des équations des petits mouvements en $\bar{y}$ et $\bar{\theta}$:

$$\boxed{\begin{bmatrix} I_\Delta & -M_\Delta \\ -M_\Delta & m_2 + m_3 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{\bar{\theta}} \\ \ddot{\bar{y}} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} b + \dfrac{D\ell^2}{v} & -\dfrac{\ell D}{v} \\ -\dfrac{D\,\ell}{v} & \dfrac{D}{v} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\bar{\theta}} \\ \dot{\bar{y}} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \ell D & 0 \\ -D & k \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \bar{\theta} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

En posant : $\boxed{I_\Delta = C_2 + A_3 + m_2\, a^2 + m_3\, \ell^2}$ et $\boxed{M_\Delta = m_3\,\ell + m_2\, a}$

<u>Analyse de la stabilité de cette position stationnaire</u> ***<u>(non demandé)</u>***

Nous allons entreprendre cette analyse dans un contexte simplifié pour se concentrer sur le principe de l'analyse de stabilité sans avoir à manipuler des éléments de calcul trop « volumineux ». Pour ce faire nous allons considérer que $m_2 = 0$ et $b = 0$.

Dans un premier temps nous allons caractériser la nature des solutions temporelles dont nous savons qu'elles appartiennent à un espace vectoriel de dimension 4. La construction d'une base de cet espace se fait classiquement en cherchant des solutions de la forme :

$$X = \begin{pmatrix} \bar{\theta}(t) \\ \bar{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_\theta \\ X_y \end{pmatrix} e^{rt}$$

L'introduction de cette forme de solution, et des simplifications envisagées, dans le système conduit à :

$$\begin{bmatrix} I_\Delta r^2 + \dfrac{D\ell^2}{v} r + \ell D & -m_3\,\ell\, r^2 - \dfrac{\ell D}{v} r \\ -m_3\,\ell\, r^2 - \dfrac{D\,\ell}{v} r - D & m_3\, r^2 + \dfrac{D}{v} r + k \end{bmatrix}\begin{pmatrix} X_\theta \\ X_y \end{pmatrix} e^{rt} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En dehors de la solution (sans intérêt) $X_\theta = X_y = 0$, ce système admet d'autres solutions si et seulement si :

$$\det\begin{bmatrix} I_\Delta r^2+\dfrac{D\ell^2}{v}r+\ell D & -m_3\,\ell\,r^2-\dfrac{\ell D}{v}r \\ -m_3\,\ell\,r^2-\dfrac{D\ell}{v}r-D & m_3\,r^2+\dfrac{D}{v}r+k \end{bmatrix}=0$$

Soit : $$m_3\left(I_\Delta-m_3\,\ell^2\right)r^4+\left(I_\Delta-m_3\,\ell^2\right)\frac{D}{v}r^3+k\,I_\Delta\,r^2+\frac{D\ell^2}{v}k\,r+\ell\,D\,k=0$$

Soit : $$m_3\,A_3\,r^4+A_3\frac{D}{v}r^3+k\left(A_3+m_3\,\ell^2\right)r^2+\frac{D\ell^2}{v}k\,r+\ell\,D\,k=0$$

soit une équation de degré quatre en r, appelée **polynôme caractéristique**, qui est de la forme :

$$a_4\,r^4+a_3\,r^3+a_2\,r^2+a_1\,r+a_0=0$$

Les quatre zéros $\left(r_1,r_2,r_3,r_4\right)$ de ce polynôme, permettent de décrire l'espace des solutions du système différentiel. Leur calcul montre que ces quatre valeurs se regroupent en deux paires de nombres complexes conjugués que nous pouvons écrire :

$$r_{1,2}=\alpha_a\pm j\,\omega_a \qquad \text{et} \qquad r_{2,3}=\alpha_b\pm j\,\omega_b$$

Ce qui permet d'écrire la solution générale du système différentiel sous la forme :

$$X=\begin{pmatrix}\overline{\theta}(t)\\ \overline{y}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X_{\theta a}\\ X_{ya}\end{pmatrix}\left(A\cos\left(\omega_a\,t\right)+B\sin\left(\omega_a\,t\right)\right)\,e^{\alpha_a\,t}+\begin{pmatrix}X_{\theta b}\\ X_{yb}\end{pmatrix}\left(D\cos\left(\omega_b\,t\right)+E\sin\left(\omega_b\,t\right)\right)\,e^{\alpha_b\,t}$$

Où :

- A, B, C et D sont des constantes déterminées par les conditions initiales en position et en vitesse.
- ω_a et ω_b sont les pulsations naturelles (de résonance) du système
- α_a et α_b caractérisent la nature de l'enveloppe exponentielle de la solution.

La **position stationnaire** étudiée sera donc **stable si et seulement si** cette enveloppe exponentielle est décroissante c'est-à-dire si les coefficient α_a **et** α_b sont des réels **négatifs.**

De manière générale, une position stationnaire est **stable si est seulement si les parties réelles des solutions (également appelés pôles) du polynôme caractéristiques sont négatives**.

Il n'est, toutefois, pas nécessaire de déterminer les valeurs de r pour vérifier cette condition. Un certain nombre de critères permettant de vérifier la stabilité ont été développés par le passé et l'un des plus courant est le critère de Routh. Ce critère s'appuie sur une matrice construite à partir des coefficients du polynôme caractéristique.

Cette matrice est initiée en construisant les deux premières lignes (jusqu'à ce que l'on trouve des « 0 ») à partir des coefficients des termes pairs et impairs, par ordre décroissant, en partant du terme de plus haut degré sur la première ligne/colonne. Dans le cas d'un polynôme d'ordre 4 il vient :

$$\begin{pmatrix} a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les lignes suivantes sont calculées (jusqu'à trouver 0) par des déterminants construits, à partir des termes situés haut dessus sur la première colonne et au-dessus à droite selon la formulation suivante :

$$b_1 = -\frac{(a_4 a_1 - a_3 a_2)}{a_3} \qquad b_2 = -\frac{(a_4 0 - a_3 a_0)}{a_3} = a_0 \qquad b_3 = -\frac{(a_4 0 - a_3 0)}{a_3} = 0$$

$$c_1 = -\frac{(a_3 b_2 - b_1 a_1)}{b_1} = \frac{a_4 a_1^2 - a_3 (a_2 a_1 - a_3 a_0)}{(a_4 a_1 - a_3 a_2)} \qquad c_2 = -\frac{(a_3 0 - b_1 0)}{b_1} = 0$$

Le critère de Routh indique qu'il y a autant de solutions (ou de pôles) à partie réelle positive que de changements de signe dans la première colonne de cette matrice. Ce qui revient à dire que la position sera stable si tous ces termes sont de même signe.

Sachant que : $a_4 = m_3 A_3 > 0$

La stabilité est assurée ssi : $a_3 = A_3 \dfrac{D}{v} > 0$ donc si $\boxed{v > 0}$

$$b_1 = -\frac{(a_4 a_1 - a_3 a_2)}{a_3} > 0 \quad \Rightarrow \quad a_3 a_2 - a_4 a_1 = A_3^2 \frac{D}{v} k > 0 \qquad a_3 a_2 - a_4 a_1 = A_3^2 \frac{D}{v} k > 0 \qquad \boxed{v > 0}$$

$$c_1 = \frac{a_4 a_1^2 - a_3 (a_2 a_1 - a_3 a_0)}{(a_4 a_1 - a_3 a_2)} > 0 \quad \Rightarrow \quad a_3 (a_2 a_1 - a_3 a_0) - a_4 a_1^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{(k\,\ell - D) > 0}$$

Cette dernière condition impose une valeur minimale à la raideur transversale de jambe du train d'atterrissage. C'est bien évidemment une condition simplifiée mais elle permet de montrer le risque induit (sur l'intégrité du train) par une jambe dont la raideur transversale serait trop faible.

4 - Energétique

Q 13 - Puissance galiléenne développée par les actions mécaniques.

Puissance galiléenne développée par les actions mécaniques extérieures :

Poids : $P^0_{Poids/\Sigma} = 0$ car la masse de S1 et négligée et les vitesses $\vec{V}(O_3/0)$ et $\vec{V}(G_2/0)$ sont orthogonales à $\vec{z}_0$

Liaison 1*/1 : $P^0_{1*/1} = \{T_{1*/1}\} \otimes \{V_{1/0}\} = X_{1*1}\, v$

Liaison 0/3 : $P^0_{0/3} = \{T_{0/3}\} \otimes \{V_{3/0}\} = Y_{03} \left(\dot{y} \cos\theta - v \sin\theta - \ell \dot{\theta} \right) + N_{03}\, \dot{\theta}$

Ressort : $P^0_{Rst/1} = \vec{R}_{Rst/1} . \vec{V}(O_1/0) = -k\, y\, \dot{y}$

Finalement : $\boxed{P^{0}_{Ext/\Sigma} = X_{1^*1}\, v + Y_{03}\left(\dot{y}\cos\theta - v\sin\theta - \ell\dot{\theta}\right) + N_{03}\,\dot{\theta} - k\, y\, \dot{y}}$

Ou, si l'on remarque que **R1* est également galiléen** :

$$\boxed{P^{1^*}_{Ext/\Sigma} = X_{03}\left(\dot{y}\sin\theta - R\dot{\varphi}\right) + Y_{03}\left(\dot{y}\cos\theta - \ell\dot{\theta}\right) + N_{03}\,\dot{\theta} - k\, y\, \dot{y}}$$

Puissance développée par les actions mécaniques intérieures :

Liaisons 1/2 et 2/3 : $P_{1\leftrightarrow 2} = P_{2\leftrightarrow 3} = 0$ car les liaisons sont parfaites

Amortisseur : $P_{Amr1\leftrightarrow 2} = \vec{M}_{Amr/2}(O_1).\vec{\Omega}(2/1) = -b\,\dot{\theta}^2$

Finalement : $\boxed{P_{Int} = -b\,\dot{\theta}^2}$

Q 14 - Energie cinétique galiléenne de Σ=S1+S2+S3.

$$E_c(\Sigma/0) = E_c(S_1/0) + E_c(S_2/0) + E_c(S_3/0)$$

Avec : $\boxed{E_c(S_1/0) = 0}$ car S1 de masse négligée

$$E_c(S_2/0) = \frac{1}{2} m_2 \left(\vec{V}(G_2/0)\right)^2 + \frac{1}{2}\,{}^T\vec{\Omega}(2/0)\,\bar{\bar{I}}(G_2,S_2)\,\vec{\Omega}(2/0)$$

$$2\,E_c(S_2/0) = m_2\left(\left(v + a\,\dot{\theta}\sin\theta\right)^2 + \left(\dot{y} - a\,\dot{\theta}\cos\theta\right)^2\right) + C_2\,\dot{\theta}^2$$

$$\boxed{2\,E_c(S_2/0) = m_2\left(v^2 + \dot{y}^2 + a^2\,\dot{\theta}^2\right) + 2\,m_2 a\,\dot{\theta}\left(v\sin\theta - \dot{y}\cos\theta\right) + C_2\,\dot{\theta}^2}$$

$$E_c(S_3/0) = \frac{1}{2} m_3 \left(\vec{V}(O_3/0)\right)^2 + \frac{1}{2}\,{}^T\vec{\Omega}(3/0)\,\bar{\bar{I}}(O_3,S_3)\,\vec{\Omega}(3/0)$$

$$2\,E_c(S_3/0) = m_3\left(\left(v + \ell\,\dot{\theta}\sin\theta\right)^2 + \left(\dot{y} - \ell\,\dot{\theta}\cos\theta\right)^2\right) + A_3\,\dot{\theta}^2 + B_3\,\dot{\varphi}^2$$

$$\boxed{2\,E_c(S_3/0) = m_3\left(v^2 + \dot{y}^2 + \ell^2\,\dot{\theta}^2\right) + 2\,m_3\,\ell\,\dot{\theta}\left(v\sin\theta - \dot{y}\cos\theta\right) + A_3\,\dot{\theta}^2 + B_3\,\dot{\varphi}^2}$$

Ou, si l'on remarque de **R1* est également galiléen** :

$$\boxed{2\,E_c(S_2/1^*) = m_2\left(\dot{y}^2 + a^2\,\dot{\theta}^2\right) - 2\,m_2 a\,\dot{\theta}\,\dot{y}\cos\theta + C_2\,\dot{\theta}^2}$$

$$\boxed{2\,E_c(S_3/1^*) = m_3\left(\dot{y}^2 + \ell^2\,\dot{\theta}^2\right) - 2\,m_3\,\ell\,\dot{\theta}\,\dot{y}\cos\theta + A_3\,\dot{\theta}^2 + B_3\,\dot{\varphi}^2}$$

Remarque : les expressions obtenues montrent que l'application du théorème de l'énergie cinétique ne présente pas d'intérêt dans cette analyse. Il ne peut être utilisé :

- ni pour obtenir une équation de mouvement puisque le système est de mobilité deux (y,θ) et que plusieurs efforts inconnus développent une puissance
- ni pour déterminer un effort, dans un contexte de mouvement connu, puisque plusieurs efforts inconnus (Y_{03}, N_{03}) développent une puissance.
- Ni pour évaluer une action à l'état stationnaire puisqu'il s'écrit 0=0 dans ce cas.