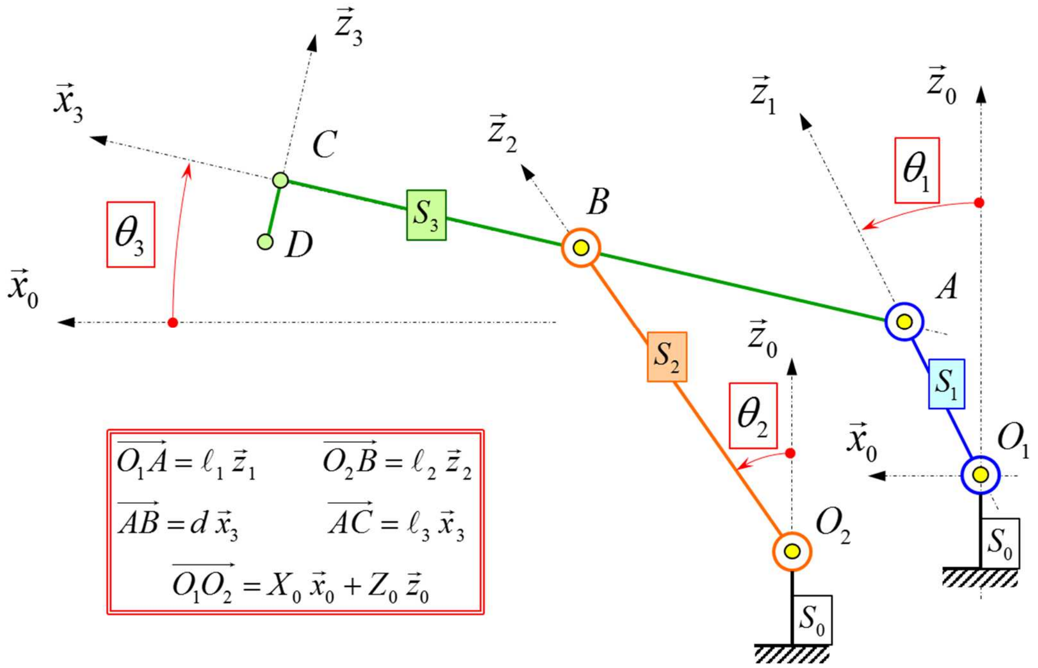
Mécanique générale

IE2 – Durée 1h

Correction

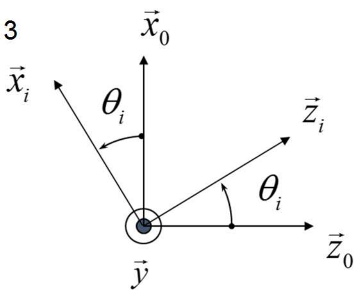
Le mécanisme plan, schématisé ci-dessous, est un mécanisme d'entrainement d'une griffe de caméra ou de projecteur de cinéma.



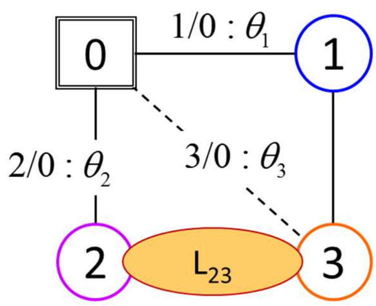
Q1 Figures de changement de base et le graphe des liaisons

Figures de changement de base

Pour i = 1, 2 ou 3



Graphe des liaisons :



Q2 Condition de fermeture de chaîne, équations de liaison et mobilité.

Condition de fermeture : la fermeture de chaine en B impose $\overrightarrow{B_3B_2} = \vec{0}$

Equations de liaison : soit : $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2B} = -d\,\vec{x}_3 - \ell_1\,\vec{z}_1 + X_0\,\vec{x}_0 + Z_0\,\vec{z}_0 + \ell_2\,\vec{z}_2 = \vec{0}$

Soit, par projection dans la base 0 :

$$\begin{cases} -d\cos\theta_3 - \ell_1\sin\theta_1 + X_0 + \ell_2\sin\theta_2 = 0 \\ d\sin\theta_3 - \ell_1\cos\theta_1 + Z_0 + \ell_2\cos\theta_2 = 0 \end{cases}$$

Mobilité : $m = p - r = 3 - 2 = 1$

Q3 Trajectoire de A/0, vitesse et l'accélération de A/0

Trajectoire de A/0 : Cercle de rayon ℓ_1 et de centre O1

Vitesse de A/0 : Il vient directement (mouvement élémentaire connu) : $V(A/0) = \ell_1 \dot{\theta}_1 \vec{x}_1$

Accélération de A/0 : de même : $\vec{A}(A/0) = \ell_1 \ddot{\theta}_1 \vec{x}_1 - \ell_1 \dot{\theta}_1^2 \vec{z}_1$

Q4 Nature du mouvement 3/2, torseur distributeur des vitesses en B et vitesse de C/2

Nature du mouvement 3/2 : Le mouvement 3/2 est un mouvement de rotation d'axe $(B, \vec{y})$ car la liaison 3/2 est une liaison pivot selon cet axe.

Torseur distributeur des vitesses en B : Il vient directement : $\{V_{3/2}\} = \begin{cases} \vec{\Omega}(3/2) = (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2)\vec{y} \\ \vec{V}(B/2) = \vec{0} \end{cases}$

Vitesse de C/2 : par changement de point, il vient directement :

$$\vec{V}(C/2) = \overrightarrow{CB} \wedge \vec{\Omega}(3/2) = (d - \ell_3)(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2)\vec{z}_3$$

Q5 Vitesse du point C dans R0.

Vitesse de C /0 : Par définition : $\vec{V}(C/0) = \left.\dfrac{d\overrightarrow{O_1C}}{dt}\right|_0 = \left.\dfrac{d(\ell_1 \vec{z}_1 + \ell_3 \vec{x}_3)}{dt}\right|_0$

Soit, en utilisant la formule de la base mobile : $\vec{V}(C/0) = \ell_1 \dot{\theta}_1 \vec{x}_1 - \ell_3 \dot{\theta}_3 \vec{z}_3$

Q6 Equations de liaison dans le contexte des petits angles, vitesses angulaires $\dot{\theta}_2$ et $\dot{\theta}_3$, torseur distributeur des vitesses 3/0 en C, nature du mouvement 3/0 et de la trajectoire de C/0.

Equations de liaison dans le contexte des petits angles :

Dans ce contexte les équations de liaison peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} -\ell_1 \theta_1 + \ell_2 \theta_2 + X_0 - d = 0 \\ d\,\theta_3 + Z_0 + \ell_2 - \ell_1 = 0 \end{cases} \quad \text{identifiable à la forme :} \quad \begin{cases} a_1 \theta_1 + a_2 \theta_2 + a_3 = 0 \\ b_3 \theta_3 + b_4 = 0 \end{cases}$$

Avec : $a_1 = -\ell_1 \quad a_2 = \ell_2 \quad a_3 = X_0 - d$ et $b_3 = d \quad b_4 = Z_0 + \ell_2 - \ell_1$

Expressions des vitesses angulaires $\dot{\theta}_2$ et $\dot{\theta}_3$:

Par dérivation des équations précédentes on obtient : $-\ell_1 \dot{\theta}_1 + \ell_2 \dot{\theta}_2 = 0$ et $\dot{\theta}_3 = 0$

Soit : $\dot{\theta}_2 = \dfrac{\ell_1}{\ell_2} \dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_3 = 0$

Torseur distributeur des vitesses 3/0 en C :

Les expressions précédentes et les résultats de la question Q5, permettent d'écrire :

$$\{V_{3/0}\} = \begin{cases} \vec{\Omega}(3/0) = \dot{\theta}_3\,\vec{y} = \vec{0} \\ \vec{V}(C/0) = \ell_1\dot{\theta}_1\,\vec{x}_1 \end{cases}$$

Nature du mouvement 3/0 :

☐ ~~le mouvement 3/0 est une rotation d'axe~~ $\cancel{(O_1, \vec{y})}$

☐ ~~le mouvement 3/0 est une rotation d'axe~~ $\cancel{(A, \vec{y})}$

☐ le mouvement 3/0 est une translation selon $\vec{x}_1 \approx \vec{x}_0$

☐ ~~le mouvement 3/0 est une translation selon~~ $\cancel{\vec{z}_1 \approx \vec{z}_0}$

Nature de la trajectoire de C/0 :

☐ ~~la trajectoire de C/0 est un cercle de rayon~~ $\cancel{\ell_1}$ ~~et de centre~~ $\cancel{O_C}$ ~~tel que~~ $\cancel{\overrightarrow{O_1O_C} = \overrightarrow{AC}}$

☐ ~~la trajectoire de C/0 est un cercle de rayon~~ $\cancel{\ell_1}$ ~~et de centre~~ $\cancel{O_C}$ ~~tel que~~ $\cancel{\overrightarrow{O_1O_C} = \overrightarrow{O_1A}}$

☐ la trajectoire de C/0 est une droite horizontale d'axe $\vec{x}_1 \approx \vec{x}_0$

☐ ~~la trajectoire de C/0 est une droite horizontale d'axe~~ $\cancel{\vec{z}_1 \approx \vec{z}_0}$

Justifications (mouvement 3/0 et trajectoire de C/0) :

Le mouvement 3/0 est une translation car : $\vec{\Omega}(3/0) = \vec{0}$

Cette translation est rectiligne horizontale car $\vec{V}(C/0) = \ell_1\dot{\theta}_1\,\vec{x}_1 = \ell_1\dot{\theta}_1\left(\cos\theta_1\vec{x}_0 - \sin\theta_1\vec{z}_0\right) \approx \ell_1\dot{\theta}_1\,\vec{x}_0$ est portée par $\vec{x}_0$ sur la totalité de la plage de variation de θ_1 ou l'hypothèse des petits angles est valide soit la condition la plus restrictive parmi $-15° < \theta_i < 15°$ pour $i \in \{1,2,3\}$.

Ce résultat peut également être obtenu à partir des coordonnées de C dans 0 qui sont données par :

$$\overrightarrow{O_1C} = \begin{pmatrix} X_C \\ 0 \\ Z_C \end{pmatrix} = \ell_1\,\vec{z}_1 + \ell_3\,\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} \ell_3\cos\theta_3 + \ell_1\sin\theta_1 \\ 0 \\ -\ell_3\sin\theta_3 + \ell_1\cos\theta_1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \ell_3 + \ell_1\,\theta_1 \\ 0 \\ -\ell_3\,\theta_3 + \ell_1 \end{pmatrix}$$

Ce qui permet de montrer (grâce au équations de liaison linéarisée) que :

1 - $Z_C \approx Cste$ car $\theta_3 \approx Cste$

2 - $X_C \approx \ell_3 + \ell_1\,\theta_1$ varie en fonction de θ_1, la relation de dépendance étant linéaire nous pouvons, par ailleurs, affirmer que le mouvement de C/0 est localement rectiligne et uniforme si $\dot{\theta}_1 = \omega = Cste$ ce qui est vrai en fonctionnement nominal de la griffe de caméra.