MÉCANIQUE GÉNÉRALE - INTERROGATION N° 1

26/11/2023 – 1H30

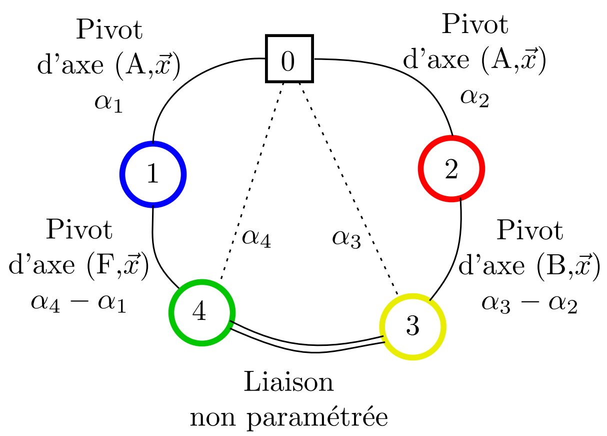
Sont autorisés : Formulaire (1 page A4 + 1 tableau des liaisons)
Calculatrice non programmable

Étude d'une pelleteuse pour enfant

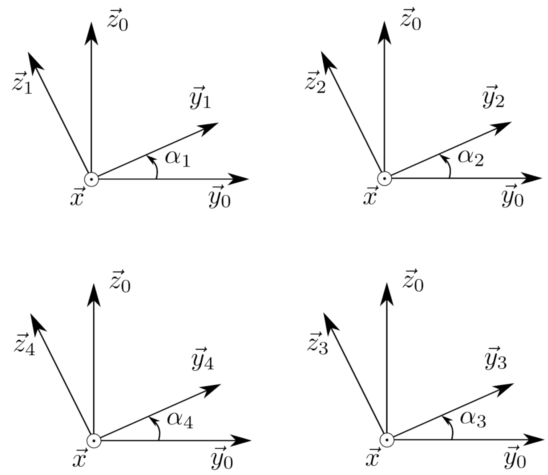
Réponses :

Questions préliminaires

1. Graphe des liaisons



2. Figures de changement de base



A) Partie A : Étude cinématique

Équations de liaison - mobilité

3. Condition de fermeture de chaîne
Les centres qui forment la liaison pivot entre 3 et 4 doivent être confondus $\Rightarrow \mathrm{C}_3 \equiv \mathrm{C}_4 \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{\mathrm{C}_3\mathrm{C}_4} = \vec{0}}$

4. Équations de liaison
$\overrightarrow{\mathrm{C}_3\mathrm{C}_4} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{C}_3\mathrm{B}} + \overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{\mathrm{AF}} + \overrightarrow{\mathrm{FC}_4} = -d_3\vec{y}_3 - b_2\vec{z}_2 + d_1\vec{y}_1 + b_4\vec{z}_4 = \vec{0}$
En exprimant les vecteurs dans le repère R_0 et en projetant sur $\vec{y}_0$ et $\vec{z}_0$, on obtient ces 2 équations :
$$\boxed{\begin{cases} -d_3\cos\alpha_3 + b_2\sin\alpha_2 + d_1\cos\alpha_1 - b_4\sin\alpha_4 = 0 & \text{(edl1)} \\ -d_3\sin\alpha_3 - b_2\cos\alpha_2 + d_1\sin\alpha_1 + b_4\cos\alpha_4 = 0 & \text{(edl2)} \end{cases}}$$

5. Degré de mobilité $k = n - m$ avec $\begin{cases} n = 4 & \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ et } \alpha_4 \\ m = 2 & \text{(edl1) et (edl2)} \end{cases} \Rightarrow \boxed{k = 2}$
Ces deux degrés de mobilité correspondent aux mouvements des deux manettes S_1 et S_2 par rapport à S_0 et donc aux deux paramètres de mouvement α_1 et α_2.

6. Déplacement de la pelle selon $\vec{y}_0$
Si la pelle est contrainte à se déplacer parallèlement au sol alors il faut vérifier cette condition : $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{OE}} \cdot \vec{z}_0 = 0}$.
Cette condition impose que les manettes ne sont plus indépendantes mais doivent être manipulées en même temps pour garantir un déplacement horizontal.

Calculs cinématiques

7. $\{\mathcal{V}_{1/0}\}_{(\mathrm{G})} : \begin{cases} \vec{\Omega}(1/0) = \dot{\alpha}_1 \vec{x} \\ \vec{V}(\mathrm{G}, 1/0) = v\vec{y}_1 \end{cases}$

   $\{\mathcal{V}_{1/0}\}_{(\mathrm{A})} : \begin{cases} \vec{\Omega}(1/0) = \dot{\alpha}_1 \vec{x} \\ \vec{V}(\mathrm{A}, 1/0) = \vec{0} \end{cases}$

   D'après la cinématique du solide, on a : $\vec{V}(\mathrm{G}/0) = \vec{V}(\mathrm{G}, 1/0) = \vec{V}(\mathrm{A}, 1/0) + \overrightarrow{\mathrm{GA}} \wedge \vec{\Omega}(1/0) \Rightarrow v\vec{y}_1 = -c\dot{\alpha}_1\vec{y}_1$ ou en calculant $\vec{V}(\mathrm{G}/0)$ par dérivation : $\vec{V}(\mathrm{G}/0) = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{AG}}}{\mathrm{d}t}\right)_0$

   On en déduit que $\boxed{v = -c\dot{\alpha}_1}$

8. $\vec{V}(\mathrm{F}/0) = \vec{V}(\mathrm{F}, 1/0) = \vec{V}(\mathrm{A}, 1/0) + \overrightarrow{\mathrm{FA}} \wedge \vec{\Omega}(1/0)$ ou $\vec{V}(\mathrm{F}/0) = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{AF}}}{\mathrm{d}t}\right)_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{V}(\mathrm{F}/0) = d_1\dot{\alpha}_1\vec{z}_1 = -\frac{d_1}{c} v\ \vec{z}_1}$

9. Application numérique : $\boxed{\|\vec{V}(\mathrm{F}/0)\| = 0.8 \text{ m.s}^{-1}} \quad \Rightarrow \quad$ On est bien inférieur à la préconisation d'1 m.s^{-1}

B) Partie B : Étude statique

Dans cette partie, on est dans le cas où $\alpha_1 = \alpha_3$ et $\alpha_2 = \alpha_4 = 0$. On en déduit que certaines bases sont identiques $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_4$ et $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_3$

Bilan inconnues / équations (non demandé)

inconnues			équations
5 liaisons pivots 1/0, 2/0, 3/2, 4/0 et 4/3	10	12	4 solides (S_1, S_2, S_3 et S_4)
	10	12	

Le bilan n'est pas équilibré mais dans ce problème d'ingénierie, on peut rajouter 2 inconnues :

- F_d : l'effort appliqué par la main droite de l'enfant sur la manette S_2.
- F_g : l'effort appliqué par la main gauche de l'enfant sur la manette S_1.

On se trouve bien dans le cas d'un problème isostatique que l'on peut résoudre.

10. S_3 est soumis à 2 glisseurs :

    - Action de 4 sur 3 : $\{\mathcal{F}_{4/3}\}_{(\mathrm{C})} : \begin{cases} \vec{R}_{4/3} = Y_{43}\vec{y}_{1,3} + Z_{43}\vec{z}_{1,3} \\ \vec{M}_{4/3}(\mathrm{C}) = \vec{0} \end{cases}$
    - Action de 2 sur 3 : $\{\mathcal{F}_{2/3}\}_{(\mathrm{B})} : \begin{cases} \vec{R}_{2/3} = Y_{23}\vec{y}_{1,3} + Z_{23}\vec{z}_{1,3} \\ \vec{M}_{2/3}(\mathrm{B}) = \vec{0} \end{cases}$

    S_3 étant à l'équilibre, le PFS appliqué à S_3 permet d'écrire :

    $$\begin{cases} \text{TRS appliqué à } S_3 \text{ selon } \vec{y}_{1,3} & \Rightarrow & Y_{23} + Y_{43} = 0 & (1) \\ \text{TRS appliqué à } S_3 \text{ selon } \vec{z}_{1,3} & \Rightarrow & Z_{23} + Z_{43} = 0 & (2) \\ \text{TMS appliqué à } S_3 \text{ autour de } (\mathrm{C}, \vec{x}) & \Rightarrow & -d_3 Z_{23} = 0 & (3) \end{cases}$$

    (3) permet de trouver que $Z_{23} = 0$

    (2) et le résultat précédent permet d'écrire que $Z_{43} = 0$. Les composantes des résultantes $\vec{R}_{2/3}$ et $\vec{R}_{4/3}$ selon $\vec{z}_{1,3}$ sont donc nulles.

    (1) permet de conclure que $Y_{23} = -Y_{43}$ et donc que $\vec{R}_{2/3} = -\vec{R}_{4/3}$ et qu'ils sont colinéaires à $\vec{y}_{1,3}$

    Ce résultat aurait pu se déduire directement du fait que S_3 est soumis à 2 glisseurs et donc que ces 2 glisseurs ont le même support qui correspond à la droite passant par les points d'application (ici la droite (BC)). On retrouve bien ainsi $\vec{R}_{2/3} = -\vec{R}_{4/3}$ qui sont colinéaires à $\vec{y}_{1,3}$ et donc que $Z_{43} = Z_{32} = 0$

11. BAME sur S_4 :

- Action de 3 sur 4 : $\{\mathcal{F}_{3/4}\}_{(C)} : \left\{\begin{array}{l}\vec{R}_{3/4} = -\vec{R}_{4/3} = -Y_{43}\vec{y}_{1,3}\\ \vec{M}_{3/4}(C) = \vec{0}\end{array}\right.$
- Action de 1 sur 4 : $\{\mathcal{F}_{1/4}\}_{(F)} : \left\{\begin{array}{l}\vec{R}_{1/4} = Y_{14}\vec{y}_{1,3} + Z_{14}\vec{z}_{1,3}\\ \vec{M}_{1/4}(F) = \vec{0}\end{array}\right.$
- Action du sol sur 4 : $\{\mathcal{F}_{sol/4}\}_{(E)} : \left\{\begin{array}{l}\vec{R}_{sol/4} = F\vec{y}_{0,2,4}\\ \vec{M}_{sol/4}(E) = \vec{0}\end{array}\right.$
- Action du poids sur 4 : négligé

Après avoir exprimé ces torseurs dans le même repère et au même point, le PFS en F appliqué à S_4 à l'équilibre permet d'écrire : $\boxed{\begin{array}{llll}\text{TRS appliqué à } S_4 \text{ selon } \vec{y}_{1,3} & \Rightarrow & Y_{14} - Y_{43} + F\cos\alpha_1 = 0 & (4)\\ \text{TRS appliqué à } S_4 \text{ selon } \vec{z}_{1,3} & \Rightarrow & Z_{14} - F\sin\alpha_1 = 0 & (5)\\ \text{TMS appliqué à } S_4 \text{ autour de } (F,\vec{x}) & \Rightarrow & b_4Y_{43}\cos\alpha_1 + aF = 0 & (6)\end{array}}$

et en bonus si on projette dans R_0 (même si c'est moins judicieux)

$$\left\{\begin{array}{lll}\text{TRS appliqué à } S_4 \text{ selon } \vec{y}_{0,2,4} & \Rightarrow & Y_{14}\cos\alpha_1 - Z_{14}\sin\alpha_1 - Y_{43}\cos\alpha_1 - F = 0\\ \text{TRS appliqué à } S_4 \text{ selon } \vec{z}_{0,2,4} & \Rightarrow & Y_{14}\sin\alpha_1 + Z_{14}\cos\alpha_1 - Y_{43}\sin\alpha_1 = 0\\ \text{TMS appliqué à } S_4 \text{ autour de } (F,\vec{x}) & \Rightarrow & b_4Y_{43}\cos\alpha_1 + aF = 0\end{array}\right.$$

12. BAME sur S_2 :

- Action de 3 sur 2 : $\{\mathcal{F}_{3/2}\}_{(B)} : \left\{\begin{array}{l}\vec{R}_{3/2} = \vec{R}_{4/3} = Y_{43}\vec{y}_{1,3}\\ \vec{M}_{3/2}(B) = \vec{0}\end{array}\right.$
- Action de 0 sur 2 : $\{\mathcal{F}_{0/2}\}_{(A)} : \left\{\begin{array}{l}\vec{R}_{0/2} = Y_{02}\vec{y}_{0,2,4} + Z_{02}\vec{z}_{0,2,4}\\ \vec{M}_{0/2}(A) = \vec{0}\end{array}\right.$
- Action de la main droite sur 2 : $\{\mathcal{F}_{d/2}\}_{(D)} : \left\{\begin{array}{l}\vec{R}_{d/2} = F_d\vec{y}_{0,2,4}\\ \vec{M}_{d/2}(D) = \vec{0}\end{array}\right.$
- Action du poids sur 2 : négligé

Après avoir exprimé ces torseurs dans le même repère et au même point, le PFS en A appliqué à S_2 à l'équilibre permet d'écrire : $\boxed{\begin{array}{llll}\text{TRS appliqué à } S_2 \text{ selon } \vec{y}_{0,2,4} & \Rightarrow & Y_{43}\cos\alpha_1 + Y_{02} + F_d = 0 & (7)\\ \text{TRS appliqué à } S_2 \text{ selon } \vec{z}_{0,2,4} & \Rightarrow & Y_{43}\sin\alpha_1 + Z_{02} = 0 & (8)\\ \text{TMS appliqué à } S_2 \text{ autour de } (A,\vec{x}) & \Rightarrow & -b_2Y_{43}\cos\alpha_1 - cF_d = 0 & (9)\end{array}}$

Rappel : on a $Y_{32} = Y_{43} = -Y_{34} = -Y_{23}$

et en bonus si on projette dans R_1 :

$$\left\{\begin{array}{lll}\text{TRS appliqué à } S_2 \text{ selon } \vec{y}_{1,3} & \Rightarrow & Y_{43} + (Y_{02} + F_d)\cos\alpha_1 + Z_{02}\sin\alpha_1 = 0\\ \text{TRS appliqué à } S_2 \text{ selon } \vec{z}_{1,3} & \Rightarrow & Y_{43} - (Y_{02} + F_d)\sin\alpha_1 + Z_{02}\cos\alpha_1 = 0\\ \text{TMS appliqué à } S_2 \text{ autour de } (A,\vec{x}) & \Rightarrow & -b_2Y_{43}\cos\alpha_1 - cF_d = 0\end{array}\right.$$

13. À partir des équations (6) et (9) et en tenant compte que $b_2 = b_4$, on obtient : $\boxed{F_d = \frac{a}{c}F}$

Application numérique : $\boxed{F_d = 18,75 \text{ N}}$

On vérifie bien que notre situation est compatible avec la force d'un enfant de 4 ans.

14. En appliquant le PFS sur S_1 en A, on obtient 3 équations.

Seule l'équation obtenue avec $\boxed{\text{le TMS appliqué à } S_1 \text{ autour de } (A,\vec{x})}$ permet d'obtenir directement l'expression de F_g en fonction des composantes $\vec{R}_{1/4}$. Les 2 autres équations permettent d'obtenir $\vec{R}_{0/1}$

Expression de F_g en fonction de F (non demandé)

On trouve $\boxed{F_g = -\frac{d_1}{c}Z_{14} = -\frac{d_1}{c}F\sin\alpha_1}$ en utilisant l'équation (5)