

Mécanique des systèmes - Examen de fin de semestre 1

Jeudi 01/02/2024 – Durée 2h (10h-12h)

Etude cinématique de deux malaxeurs

Documents autorisés : 2 pages A4 de formulaire personnel ; calculatrice ; tableau des liaisons standard.

Les parties 1 et 2 sont indépendantes. Le barème fourni est indicatif.

1 MALAXEUR 3D : ETUDE ANALYTIQUE (~13PTS)

Le malaxeur étudié dans cette première partie peut être utilisé dans le domaine de l'agroalimentaire mais également d'autres industries (chimie, bâtiment).

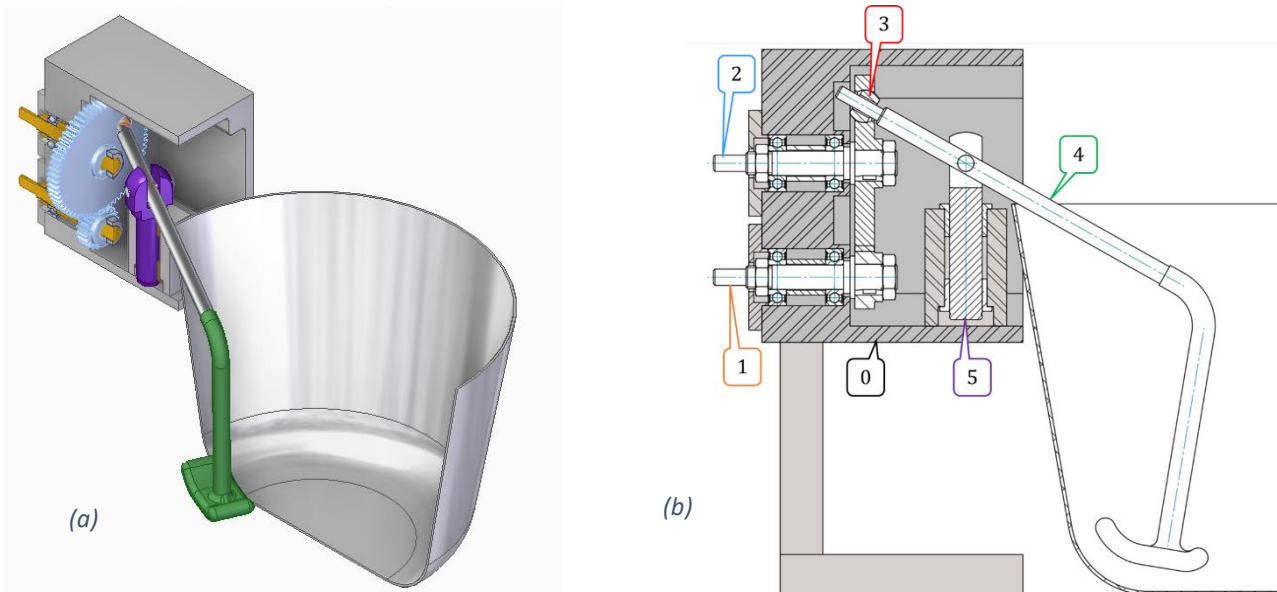


Figure 1. (a) Modèle CAO du malaxeur (b) Dessin d'ensemble en coupe du malaxeur

Le mécanisme du système, illustré figure 1 et schématisé en figure 2 (Annexe 1) est constitué de 5 solides rigides :

- un pignon S_1 en liaison pivot d'axe $(A, \vec{x}_{0,1})$ avec le bâti S_0 .
Paramètre de mouvement 1/0 : $\alpha_1 = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$.
- une roue dentée S_2 qui est :
 - o d'une part, en liaison pivot d'axe $(C, \vec{x}_{0,2})$ avec le bâti S_0 .
Paramètre de mouvement 2/0 : $\alpha_2 = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$.
 - o d'autre part, en liaison de type engrènement en B avec le pignon S_1 : le modèle associé sera un contact avec roulement sans glissement.
Cette liaison n'est pas paramétrée.
- un solide S_3 qui est en liaison rotule de centre D avec la roue dentée S_2 .
Cette liaison n'est pas paramétrée.
- un arbre S_5 en liaison pivot d'axe $(E, \vec{z}_{0,5})$ avec le bâti S_0 .
Paramètre de mouvement 5/0 : $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_5)$.
- une spatule S_4 de centre de masse G_4 et d'extrémité M . Qui est :
 - o d'une part, en liaison glissière de direction $\vec{x}_{3,4}$ avec le solide S_3 .
Paramètre de mouvement 4/3 : x tel que $\overrightarrow{DE} = x\vec{x}_{3,4}$.
 - o d'autre part en liaison pivot d'axe $(E, \vec{y}_{5,4})$ avec l'arbre S_5 .
Paramètre de mouvement 4/5 : $\beta = (\vec{z}_5, \vec{z}_4)$.

Les données géométriques du problème sont fournies en figure 2. Le pignon S_1 constitue l'entrée du mécanisme. Il est entraîné par un moteur qui n'est pas représenté ici. Le mouvement de sortie est le mouvement 3D de la spatule S_4 qui va permettre le malaxage.

1.1 ETUDE PRELIMINAIRE

1. Tracer le graphe des liaisons et les figures de changement de base dans le cadre **fourni en annexe 1**.
2. Ecrire et développer la condition de roulement sans glissement en B.

Roulement sans glissement en B : $\vec{V}(B, 2/1) = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{V}(B, 2/0) - \vec{V}(B, 1/0) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{V}(C, 2/0) + \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/0}} - (\vec{V}(A, 1/0) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow R_2 \overrightarrow{z_0} \wedge \alpha_2 \overrightarrow{x_{0,1,2}} + r_1 \overrightarrow{z_0} \wedge \alpha_1 \overrightarrow{x_{0,1,2}} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (R_2 \alpha_2 + r_1 \alpha_1) \overrightarrow{y_0} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (R_2 \alpha_2 + r_1 \alpha_1) \overrightarrow{y_0} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{R_2 \alpha_2 = -r_1 \alpha_1} \text{ Eq}^\circ \text{ n}^\circ \text{1}$$

3. Ecrire et développer la condition de liaison entre S_2 et S_3 (les projections seront faites dans la base 0).

Liaison rotule de centre D entre 2 et 3. Condition de liaison : $\overrightarrow{D_2 D_3} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{D_2 C} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{ED_3} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow -b \overrightarrow{z_2} + a \overrightarrow{x_0} - x \overrightarrow{x_{3,4}} = \vec{0}$$


$$\Rightarrow -b \overrightarrow{z_2} + a \overrightarrow{x_0} - x \cos \beta \overrightarrow{x_5} + x \sin \beta \overrightarrow{z_{5,0}} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{x_0} & a - x \cos \beta \cos \theta = 0 & \text{Eq}^\circ \text{ n}^\circ \text{2} \\ \overrightarrow{y_0} & b \sin \alpha_2 - x \cos \beta \sin \theta = 0 & \text{Eq}^\circ \text{ n}^\circ \text{3} \\ \overrightarrow{z_0} & -b \cos \alpha_2 + x \sin \beta = 0 & \text{Eq}^\circ \text{ n}^\circ \text{4} \end{cases}$$

4. Donner le degré de mobilité du système.

Il y a 5 paramètres de mouvement et 4 équations les reliant, le degré de mobilité vaut donc 1.

$$\boxed{m = 5 - 4 = 1}$$

 INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON	Département FIMI 2 ^{ème} année	NOM	PRENOM

1.2 TORSEURS CINEMATIQUES

Les questions précédentes ont permis d'établir les relations entre paramètres. On analyse désormais les différents mouvements.

5. Donner la nature du mouvement 1/0 et en déduire la nature du torseur cinématique du mouvement 1/0.
Exprimer le torseur cinématique du mouvement 1/0 au point A.

Liaison 1/0 : pivot. Le mouvement 1/0 est donc une **rotation** autour de l'axe $(A, \vec{x}_{0,1})$. Le torseur correspondant est un **GLISSEUR**.

$$\{\mathcal{V}_{1/0}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{1/0} \\ \vec{V}(A, 1/0) \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 \vec{x}_{0,1,2} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

6. Exprimer le torseur cinématique du mouvement 2/0 au point D. Quelle est la trajectoire du point D dans son mouvement par rapport à 0 ?

Calcul de la vitesse de D dans le mouvement 2/0 :

$$D \in 2 \Rightarrow \vec{V}(D, 2/0) = \vec{V}(D/0) = \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{CD} \right]_0 = \left[\frac{d}{dt} b \vec{z}_2 \right]_0 = -b \alpha_2 \vec{y}_2$$

Finalement,

$$\{\mathcal{V}_{2/0}\}_D = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{2/0} \\ \vec{V}(D, 2/0) \end{array} \right\}_D = \left\{ \begin{array}{c} \alpha_2 \vec{x}_{0,1,2} \\ -b \alpha_2 \vec{y}_2 \end{array} \right\}_D$$

Trajectoire : D décrit des cercles de centre C et de rayon b dans le plan $(C, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.


7. Exprimer le torseur cinématique du mouvement 2/1 au point B. Identifier les vecteurs roulement et pivotement associés.

On a vu que $\vec{V}(B, 2/1) = \vec{0}$ (Condition de roulement sans glissement)

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{2/1} \\ \vec{V}(B, 2/1) \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{2/0} - \vec{\Omega}_{1/0} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} (\alpha_2 - \alpha_1) \vec{x}_{0,1,2} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$$

Pivotement : $\vec{P}_{2/1}(B) = (\vec{\Omega}_{2/1} \cdot \vec{z}_0) \vec{z}_0 = \vec{0}$

Roulement : $\vec{R}_{2/1}(B) = \vec{\Omega}_{2/1} - \vec{P}_{2/1}(B) = \vec{\Omega}_{2/1} = (\alpha_2 - \alpha_1) \vec{x}_{0,1,2}$

 INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON	Département FIMI 2 ^{ème} année	NOM	PRENOM

8. Donner la nature du mouvement 4/3 et en déduire la nature du torseur cinématique du mouvement 4/3.
Exprimer le torseur cinématique du mouvement 4/3 au point E.

Liaison 4/3 : glissière. Le mouvement 4/3 est donc une translation rectiligne de direction $\vec{x}_{3,4}$. Le torseur associé est un COUPLE.

$$\{v_{4/3}\}_E = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \dot{x}\vec{x}_{4,3} \end{array} \right\}_{E \text{ ou } \forall pt}$$

La spatule S_4 constitue la sortie du mécanisme, la description du mouvement 4/0 permet de caractériser le mouvement de malaxage.

9. Expression du torseur cinématique du mouvement 4/0 :
a. exprimer ses éléments de réduction au point E.


$$\{v_{4/0}\}_E = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{4/0} \\ \vec{V}(E, 4/0) \end{array} \right\}_E = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\beta}\vec{y}_{5,4,3} + \dot{\theta}\vec{z}_{0,5} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_E$$

En effet, $\vec{\Omega}_{4/0} = \vec{\Omega}_{4/5} + \vec{\Omega}_{5/0} = \dot{\beta}\vec{y}_{5,4,3} + \dot{\theta}\vec{z}_{0,5}$

Et $\vec{V}(E, 4/0) = \vec{0}$ car E est fixe dans R_0 .

- b. exprimer la vitesse du point M, extrémité de la spatule, par rapport à 0. Donner le résultat dans la base liée au solide 4, en fonction des paramètres β et θ , de leurs dérivées par rapport au temps et des données géométriques du problème.

$$\begin{aligned} \vec{V}(M/0) &= \left[\frac{d}{dt} \vec{EM} \right]_0 = \left[\frac{d}{dt} (c\vec{x}_4 - d\vec{z}_4) \right]_0 = \vec{\Omega}_{4/0} \wedge (c\vec{x}_4 - d\vec{z}_4) \\ \Rightarrow \vec{V}(M/0) &= (\dot{\beta}\vec{y}_{5,4,3} + \dot{\theta}\vec{z}_{0,5}) \wedge (c\vec{x}_4 - d\vec{z}_4) \\ \Rightarrow \vec{V}(M/0) &= -c\dot{\beta}\vec{z}_4 - d\dot{\beta}\vec{x}_4 + c\dot{\theta}\cos\beta\vec{y}_{5,4} - d\dot{\theta}\sin\beta\vec{y}_{5,4} \end{aligned}$$

 INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON	Département FIMI 2 ^{ème} année	NOM	PRENOM

c. sans effectuer de nouveaux calculs, donner la vitesse du point G_4 par rapport à 0.

Vecteur position de la même forme $c \leftrightarrow e$ et $d \leftrightarrow f$

$$\Rightarrow \vec{V}(G_4/0) = -e\dot{\beta}\vec{z}_4 - f\dot{\beta}\vec{x}_4 + e\dot{\theta}\cos\beta\vec{y}_{5,4} - f\dot{\theta}\sin\beta\vec{y}_{5,4}$$

1.3 ANALYSE NECESSAIRE AU PREDIMENSIONNEMENT

Le dimensionnement du malaxeur implique le choix du moteur et de son régime de fonctionnement, le choix des coussinets dans la liaison pivot entre S_0 et S_5 ainsi que la connaissance des sollicitations sur la spatule S_4 .

Tout d'abord, afin de choisir les coussinets de la liaison pivot entre S_5 et S_0 , on souhaite connaître la vitesse de rotation associée. La manipulation des équations de liaisons développées à la question 3 permet, entre-autre, d'établir la relation suivante :

$$\tan \theta = \frac{b}{a} \sin \alpha_2$$

10. Exprimer la vitesse angulaire $\overrightarrow{\Omega}_{5/0}$ en fonction du paramètre d'entrée, de sa dérivée par rapport au temps et des données géométriques du problème.

NB1 : Hypothèse liée au paramétrage : lorsque $\alpha_1 = 0$, alors $\alpha_2 = 0$.

NB2 : Rappel mathématique : $\frac{d}{dx}(\tan x) = 1 + \tan^2 x$

Objectif : exprimer $\dot{\theta}$ en fonction du paramètre d'entrée α_1 et sa dérivée. $\overrightarrow{\Omega}_{5/0} = \dot{\theta}\vec{z}_{0,5}$

Dérivée temporelle de l'équation fournie ci-dessus :

$$\dot{\theta}(1 + \tan^2 \theta) = \frac{b}{a} \dot{\alpha}_2 \cos \alpha_2$$

Pour avoir une expression de $\dot{\theta}$ uniquement en fonction de α_2 et ses dérivées, on réinjecte l'équation fournie :

$$\Rightarrow \dot{\theta} \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \alpha_2 \right) = \frac{b}{a} \dot{\alpha}_2 \cos \alpha_2$$


$$\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{b}{a} \frac{\dot{\alpha}_2 \cos \alpha_2}{\left(1 + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \alpha_2 \right)}$$

On sait exprimer α_2 en fonction de α_1 grâce à l'équation de roulement sans glissement établie en question 2 :

$$\boxed{R_2 \dot{\alpha}_2 = -r_1 \dot{\alpha}_1} \text{ Eq° n°1}$$

Donc $\dot{\alpha}_2 = -\frac{r_1}{R_2} \dot{\alpha}_1$ et si on l'intègre (NB1) : $\alpha_2 = -\frac{r_1}{R_2} \alpha_1$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = -\frac{b}{a} \frac{\frac{r_1}{R_2} \dot{\alpha}_1 \cos \left(\frac{r_1}{R_2} \alpha_1 \right)}{\left(1 + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \left(\frac{r_1}{R_2} \alpha_1 \right) \right)}$$

 INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON	Département FIMI 2 ^{ème} année	NOM	PRENOM

Dans un deuxième temps, pour analyser les sollicitations sur la spatule, on souhaite lui appliquer le principe fondamental de la dynamique (notion qui sera abordée au semestre 4 en Mécanique des Systèmes) ce qui implique de déterminer l'accélération de son centre de masse G_4 .

11. Calculer l'accélération du point G_4 par rapport au repère fixe 0 en fonction de β, θ , de leurs dérivées par rapport au temps et des données géométriques du problème. Pour simplifier son expression, et comme $f \ll e$, **on négligera f** .

Si $f \sim 0$, alors :


$$\vec{V}(G_4/0) = -e\dot{\beta}\vec{z}_4 + e\dot{\theta} \cos \beta \vec{y}_{5,4}$$

Par définition : $\vec{\Gamma}(G_4/0) = \left[\frac{d}{dt} \vec{V}(G_4/0) \right]_0$ donc : $\vec{\Gamma}(G_4/0) = \left[\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 0 \\ e\dot{\theta} \cos \beta \\ -e\dot{\beta} \end{pmatrix} \right]_{4,0}$

Formule de la base mobile :

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}(G_4/0) &= \left[\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 0 \\ e\dot{\theta} \cos \beta \\ -e\dot{\beta} \end{pmatrix} \right]_{4,4} + \overrightarrow{\Omega}_{4/0} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ e\dot{\theta} \cos \beta \\ -e\dot{\beta} \end{pmatrix}_4 \\ \vec{\Gamma}(G_4/0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ e\ddot{\theta} \cos \beta - e\dot{\theta}\dot{\beta} \sin \beta \\ -e\ddot{\beta} \end{pmatrix}_4 + \begin{pmatrix} -\dot{\theta} \sin \beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\theta} \cos \beta \end{pmatrix}_4 \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ e\dot{\theta} \cos \beta \\ -e\dot{\beta} \end{pmatrix}_4 \\ \vec{\Gamma}(G_4/0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ e\ddot{\theta} \cos \beta - e\dot{\theta}\dot{\beta} \sin \beta \\ -e\ddot{\beta} \end{pmatrix}_4 + \begin{pmatrix} -e\dot{\beta}^2 - e\dot{\theta}^2 \cos^2 \beta \\ -e\dot{\beta}\dot{\theta} \sin \beta \\ -e\dot{\theta}^2 \sin \beta \cos \beta \end{pmatrix}_4 \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{\Gamma}(G_4/0) = \begin{pmatrix} -e\dot{\beta}^2 - e\dot{\theta}^2 \cos^2 \beta \\ e\ddot{\theta} \cos \beta - 2e\dot{\theta}\dot{\beta} \sin \beta \\ -e\ddot{\beta} - e\dot{\theta}^2 \sin \beta \cos \beta \end{pmatrix}_4}$$

 INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON	Département FIMI 2 ^{ème} année	NOM	PRENOM

2 MALAXEUR 2D : ÉTUDE GRAPHIQUE (~7PTS)

On étudie désormais un second type de malaxeur alimentaire (image ci-contre) dont le mouvement s'effectue dans un plan. Les liaisons entre 0 et 2 en B, entre 2 et 1 en C, entre 1 et 4 en D, entre 3 et 4 en E et entre 0 et 3 en F sont des liaisons pivot parfaites et la liaison entre les solides 2 et 3 est un engrenement modélisé par un contact avec roulement sans glissement.



Le schéma cinématique de ce malaxeur est fourni en figure 3 (Annexe 2). Un motoréducteur entraîne le solide S_3 en rotation dans le **sens horaire** à la vitesse de $N_{3/0} = 4,5 \text{ tr/min}$. Pour des conditions proches d'un pétrissage à la main, la vitesse de malaxage doit rester inférieure à **200 mm/s**. Par ailleurs, le mécanisme est tel que les mouvements des pièces sont **symétriques** par rapport au plan (D, \vec{y}, \vec{z}) .

- a) Quelle hypothèse permet de garantir la symétrie des mouvements ? S'il existe, préciser le CIR (Centre Instantané de Rotation) du mouvement 2/3.

Le roulement sans glissement (RSG) au niveau du point I permet de garantir un mouvement symétrique.

Le CIR du mouvement 2/3 est le point I car l'hypothèse de RSG donne : $\vec{V}(I, 2/3) = \vec{0}$

- b) On donne $\vec{V}(E/0)$ (fig.3), justifier sa direction et son sens. Sachant que le rayon $FE = 70 \text{ mm}$, calculer sa norme.

$E \in 3 \Rightarrow \vec{V}(E/0) = \vec{V}(E, 3/0) \perp (FE)$ car 3/0 est un mouvement de rotation autour de F dans le sens horaire.

$$\underline{\text{AN}} : \|\vec{V}(E/0)\| = \|\vec{\Omega}_{3/0}\| * FE = 4,5 * \frac{2\pi}{60} * 70 = 33 \text{ mm/s}$$

Pour chacune des questions ci-après, les **tracés seront effectués sur la figure 3**, et les **justifications associées** seront fournies dans les cadres prévus à cet effet.

- c) En utilisant la particularité de ce système, tracer $\vec{V}(C/0)$.

Par symétrie, on déduit $\vec{V}(C/0)$ de $\vec{V}(E/0)$.


$\vec{V}(C/0)$ est bien perpendiculaire à (BC) .

- d) En utilisant la particularité de ce système, caractériser la trajectoire du point D dans son mouvement par rapport à 0. Tracer la vitesse $\vec{V}(D/0)$.

D appartient au plan de symétrie, ce qui signifie que son mouvement est forcément contenu dans ce plan. Donc D décrit des segments de droite (I, \vec{y})

On peut construire cette vitesse en utilisant l'équiprojectivité : $\vec{V}(D, 4/0) \cdot \frac{\overline{DE}}{\|\overline{DE}\|} = \vec{V}(E, 4/0) \cdot \frac{\overline{DE}}{\|\overline{DE}\|}$ ou

$\vec{V}(D, 1/0) \cdot \frac{\overline{DC}}{\|\overline{DC}\|} = \vec{V}(C, 1/0) \cdot \frac{\overline{DC}}{\|\overline{DC}\|}$ encore en utilisant le CIR du mouvement 4/0 (en anticipant sur la q° suivante)

 INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON	Département FIMI 2 ^{ème} année	NOM	PRENOM

e) Construire le CIR du mouvement 4/0. Tracer la vitesse $\overrightarrow{V(G/0)}$.

Le CIR 4/0 I_{40} est l'intersection des perpendiculaires à deux vitesses connues dans ce mouvement :

$$(I_{40}E) \perp \overrightarrow{V(E/0)} = \overrightarrow{V(E, 4/0)}$$

$$(I_{40}D) \perp \overrightarrow{V(D/0)} = \overrightarrow{V(D, 4/0)}$$

$\overrightarrow{V(G/0)}$, perpendiculaire à $(I_{40}G)$, est ensuite obtenue à partir du CIR 4/0 par la méthode du triangle des vitesses.

f) Construire le CIR du mouvement 1/0.

On peut adopter la même stratégie avec $\overrightarrow{V(D, 1/0)}$ et $\overrightarrow{V(C, 1/0)}$

Ou construire le symétrique de I_{40} .

g) A partir de ce dernier résultat, tracer la vitesse $\overrightarrow{V(A/0)}$.

$$A \in 1 \Rightarrow \overrightarrow{V(A/0)} = \overrightarrow{V(A, 1/0)}$$

On peut ensuite construire le vecteur vitesse grâce au CIR de 1/0 ou alors par symétrie de $\overrightarrow{V(G/0)}$

La vitesse de malaxage est définie comme la vitesse à laquelle les points A et G se rapprochent ou s'éloignent :

$$\overrightarrow{v_m} = \left[\frac{d\overrightarrow{AG}}{dt} \right]_0 = \left[\frac{d(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG})}{dt} \right]_0 = \overrightarrow{V(G/0)} - \overrightarrow{V(A/0)}$$

h) Tracer $\overrightarrow{v_m}$ et donner sa norme. Respecte-t-on la condition de l'énoncé dans la configuration présentée ?

On construit la somme vectorielle.

AN :

	Mesure	Valeur
$\ \overrightarrow{V(E/0)}\ $	20 mm	33 mm/s
$\ \overrightarrow{v_m}\ $	90 mm	~149 mm/s

La condition de l'énoncé est bien **respectée**.

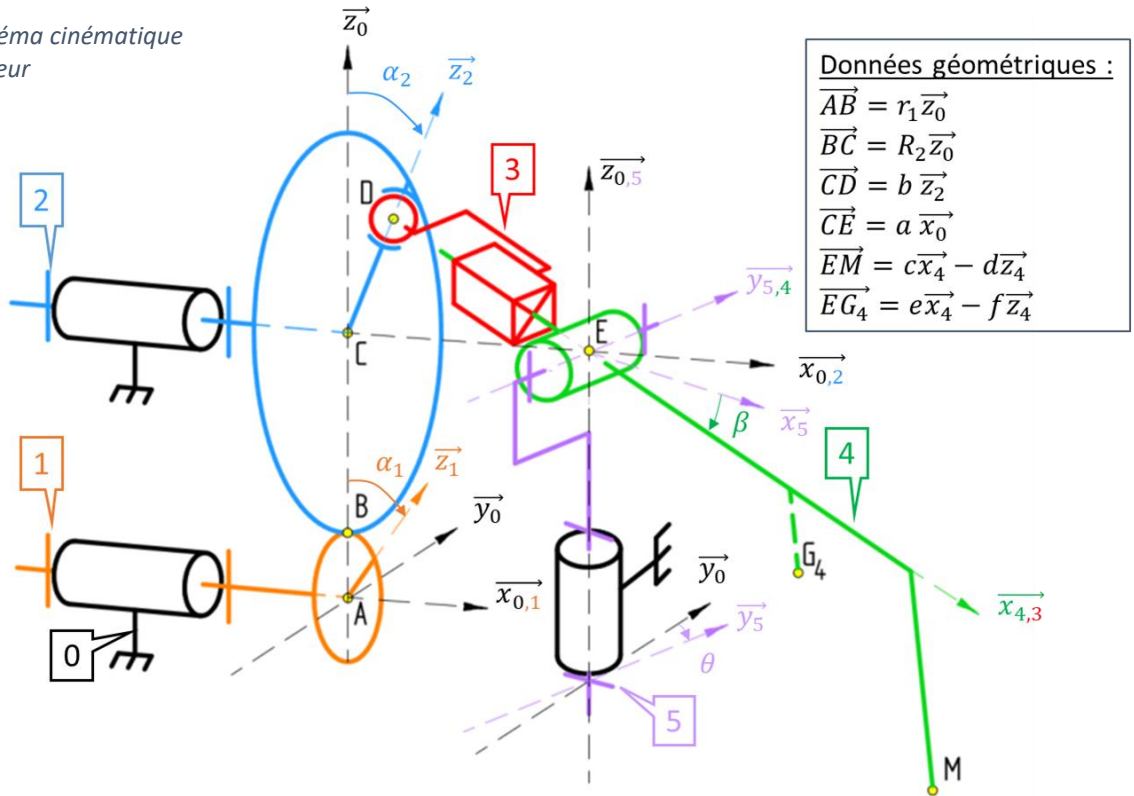
On accepte une erreur de +-10%

ANNEXE 1 – Partie 1.

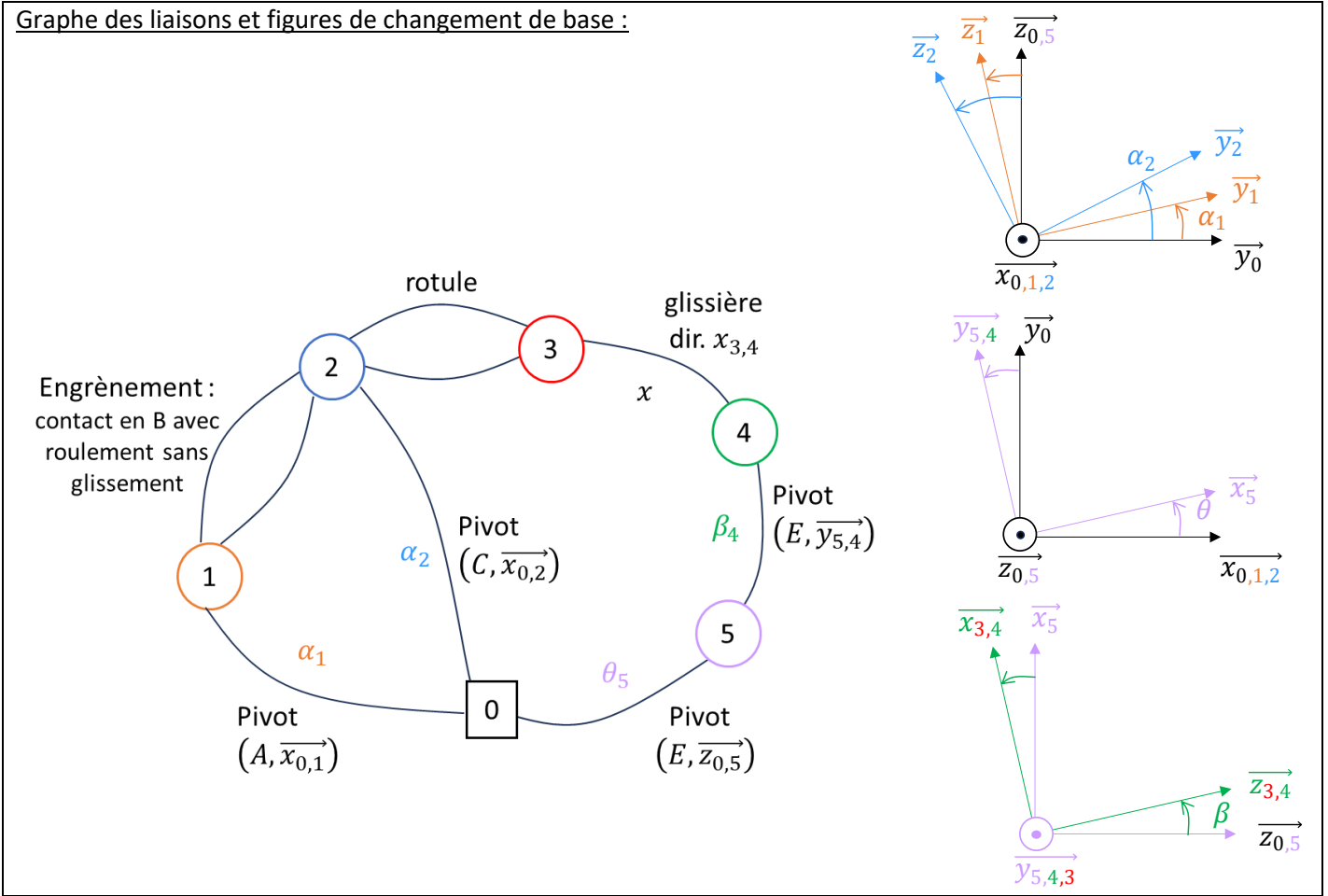
NOM

PRENOM

Figure 2. Schéma cinématique 3D du malaxeur



Graphe des liaisons et figures de changement de base :



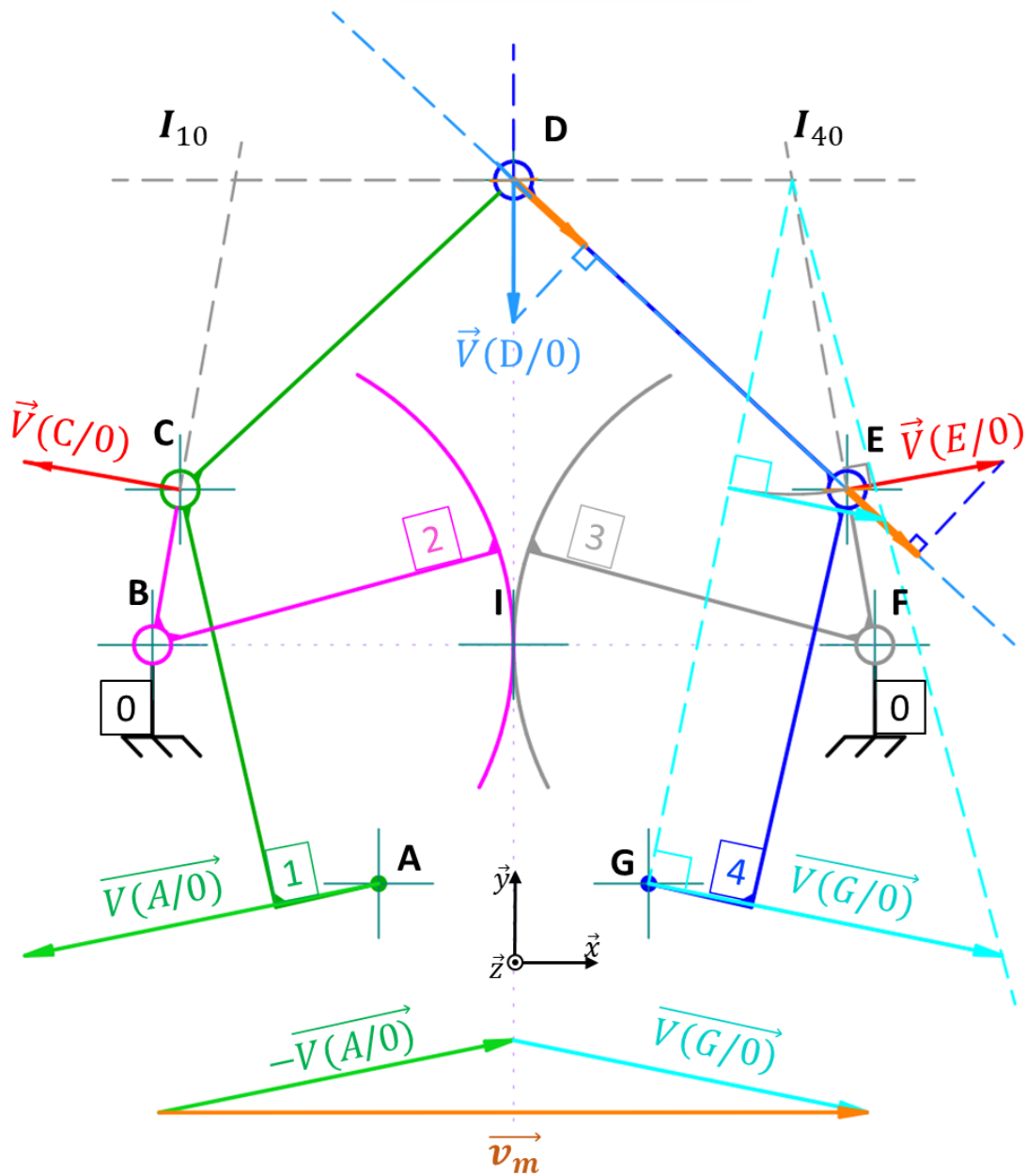


Figure 3 : Schéma cinématique plan du malaxeur