Physique : Interrogation n°2 du 3 décembre 2015 – corrigé – barème

Exercice 1 :

Q1 — **4 pts**

- Modèle équivalent au <u>condensateur</u> cylindrique infini

- On utilise un système de coordonnées cylindriques pour la topographie de E :
  - Tout plan passant par l'axe zz' est plan de symétrie des charges et des milieux, donc plan de symétrie de E, qui est contenu dans chacun de ces plans
  - Tout plan perpendiculaire à l'axe zz' est plan de symétrie des charges et des milieux, donc plan de symétrie de E, qui est contenu dans chacun de ces plans
  - Invariance de la distribution selon z et selon θ =>: $\vec{E} = E(r)\overrightarrow{u_r}$.
    Enlever 0,5 aux élèves qui ne mentionnent qu'un seul type de plan de symétrie et concluent quand même !

- On applique le théorème de Gauss pour établir l'expression du champ :
  - Surface fermée <u>cylindrique d'axe zz'</u> de rayon r compris entre r_i et r_e, de hauteur avec les <u>normales</u> dirigées vers l'extérieur
  - Le champ E est perpendiculaire aux normales $\overrightarrow{u_z}$ et $-\overrightarrow{u_z}$ des bases du cylindre, dans le flux sortant par ces faces est nul.
  - Le champ E est colinéaire à la normale $\overrightarrow{u_r}$ de la paroi latérale du cylindre et uniforme sur toute cette surface : $\iint \varepsilon E(r)\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_r}\,dS = \sum Q_{int}$
  - $E(r) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon hr}$.

- Le champ s'exprime en fonction de la tension grâce à la circulation :

$$U_0 = V_{âme} - V_{ecran} = \int_{r_i}^{r_e} E(r)\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_r}\,dr$$

$$\text{donc } U_0 = \frac{Q}{2\pi\varepsilon h}\ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right) = rE(r)\ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right),\ \text{ donc } E(r) = \frac{U_0}{r*\ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)}$$

Q2 — **2,5 pts**

- L'âme et l'écran restant chacun équipotentiels, les symétries et invariances du champ électrique restent inchangées $\vec{E} = E(r)\overrightarrow{u_r}$
  Ajouter un bonus de 0.25 points si la topographie de E est déduite de E = -gradV

- La conductivité γ de l'isolant est non nulle donc il existe une densité volumique de courant $\vec{j}$ telle que $\vec{j} = \gamma(r)\vec{E} = j(r)\overrightarrow{u_r}$

Méthode 1 :

$\vec{j}$ est à flux conservatif donc constant à travers une surface cylindrique d'axe zz' de hauteur h et de rayon r compris entre r_i et r_e : $I = \iint j(r)\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_r}\,dS$

- $I = 2\pi hrj(r)$ ou encore $j(r) = \frac{I}{2\pi hr}$
- Donc $E(r) = \frac{I}{2\pi hr\gamma(r)} = \frac{C}{r\gamma(r)}$

Méthode 2 :

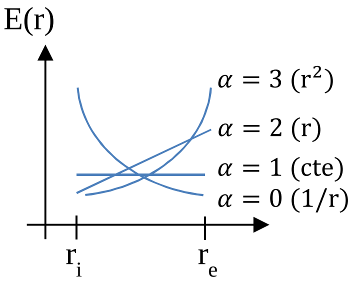
$$\operatorname{div}\vec{j} = \operatorname{div}\left(\gamma(r)E(r)\vec{u}_r\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r}\frac{\partial r\left(\gamma E\right)}{\partial r} = 0 \quad \Rightarrow \quad E(r) = \frac{C}{r\gamma(r)}$$

$$U_0 = V_{âme} - V_{ecran} = \int_{r_i}^{r_e} E(r)\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_r}\,dr$$

Donc, $U_0 = C\int_{r_i}^{r_e}\frac{dr}{r*\gamma(r)} = C\beta = r\gamma(r)E(r)\beta$, donc $E(r) = \frac{U_0}{r\gamma(r)\beta}$

Q3

1,5 pts



Commentaire: L'échauffement du câble change le sens du gradient du champ (ou tout commentaire ayant la même signification)

Q4

1,5 pts

- $div\ \varepsilon\vec{E} = \rho$ ou $div\ \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$ au choix
- d'après la topographie de E,
  $div\ \vec{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{U_0}{\gamma(r)\beta}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial(rE(r))}{\partial r}$
- Si T(r)≠cte alors γ(r)≠cte donc div(E)≠0 donc ρ≠0

Total : 9,5 (+ Bonus 0,5)

Exercice 2 : Circuits magnétiques

Q1

3 pts

a) Symétrie des courants et des milieux :

$\forall P$ considéré, le plan $(\vec{u}_r, P, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie de la distribution de courant et des milieux

$\Rightarrow \vec{B}_1$ est toujours perpendiculaire à ce plan : $\vec{B}_1 = B_1.\vec{u}_\theta$

Invariance par rapport à la rotation d'angle θ : $\vec{B}_1 = B_1(r,z).\vec{u}_\theta$

Calcul de $\vec{B}_1$: application du théorème d'Ampère généralisé: $\oint_{\Gamma^+} \frac{\vec{B}_1}{\mu}.\vec{d\ell} = \sum I_{enlacés}$

Le contour orienté doit être clairement défini avec la normale à la surface (sinon, 0)

- Si P est à l'intérieur du tore : $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0\mu_r.NI}{2\pi r}.\vec{u}_\theta$ -
- Si P est à l'extérieur du tore : $\sum I_{enclosed} = 0 \quad \Rightarrow \vec{B}_1 = \vec{0}$

1 pt

- $\vec{B}_1 \approx \frac{\mu_0\mu_r.NI}{2\pi a}.\vec{u}_\theta$
- $\Phi = L.I$ et $\Phi = \iint_S \vec{B}.\vec{dS} = N.B.S$ donc $L_1 = \frac{NB_1S}{I} \approx \frac{\mu_0\mu_r N^2 S}{2\pi a} \approx \frac{\mu_0\mu_r N^2 R^2}{2a}$

1 pt

A. N. : $B_1 \approx 1.4$ T ; $L_1 \approx 65{,}8$ mH

1,5 pts

Tore rempli d'air :

- $\vec{B}_2 = \frac{\vec{B}_1}{\mu_r} \approx \frac{\mu_0.NI}{2\pi a}.\vec{u}_\theta$
- Inductance : $L_2 = \frac{NB_1S}{I} = \frac{\mu_0 N^2 S}{2\pi a} = \frac{\mu_0 N^2 R^2}{2a} = \frac{L_1}{\mu_r}$
- A. N. : $B_2 = 0{,}2$ mT ; $L_2 = 9{,}4$ µH
- Commentaires : B_1 (avec mat. magn.) >> B_2 (sans mat. magn.) puisque μ_r >>1.

Il y a augmentation de la capacité de stockage d'énergie magnétique du solénoïde torique si matériau magnétique utilisé.

Q2 **2,5 pts**	Equation 1: Théorème d'Ampère: $\oint_{\Gamma^+} \frac{\vec{B}}{\mu}.\overrightarrow{d\ell} = \sum I_{enlacés} \Rightarrow \oint_{\Gamma_1^+} \frac{\vec{B}_1}{\mu_1}.\overrightarrow{d\ell} + \oint_{\Gamma_2^+} \frac{\vec{B}_2}{\mu_2}.\overrightarrow{d\ell} = NI$ $\frac{B_1}{\mu_1}.(2\pi a - \ell) + \frac{B_2}{\mu_2}.\ell = NI$ Equation 2 : Conservation du flux : $B_1.S = B_2.S \Rightarrow B_1 = B_2 = B$ $\frac{B}{\mu_0}\left[\frac{2\pi a - \ell}{\mu_{r1}} + \frac{\ell}{\mu_{r2}}\right] = NI \Rightarrow \mu_{r2} = \frac{\ell}{\frac{\mu_0 N I}{B} - \frac{(2\pi a - \ell)}{\mu_{r1}}}$ A. N. : $\mu_{r2} \approx 1171$
Q3 **1,5 pts**	**a)** $\vec{j}' = \overrightarrow{Rot}\,\vec{M} = \vec{0}$ car $\vec{M}_0$ uniforme. $\vec{k}' = \vec{M}_0 \wedge \vec{n} = M_0.\vec{u}_\theta$ + Schéma
Bonus **1,5 pts**	**b)** Φ conservé $\Rightarrow \vec{B}_a.\vec{S} = \vec{B}_f.\vec{S} = \vec{B}_e.\vec{S} \Rightarrow \vec{B}_a = \vec{B}_e = \vec{B}_f = \vec{B}$ (non noté) Théorème d'Ampère : $\frac{B}{\mu_0}.\ell_a + \frac{B}{\mu_0.\mu_r}.(2\pi a - \ell_a - e) + \frac{B}{\mu_0}.e = M_0.\ell_a$ Donc $B = \frac{M_0.\ell_a}{\frac{\ell_a}{\mu_0} + \frac{2\pi a - \ell_a - e}{\mu_0.\mu_r} + \frac{e}{\mu_0}}$
	Total : 10,5 + 1,5 (bonus)