

Physique : Interrogation n°2 – corrigé – barème

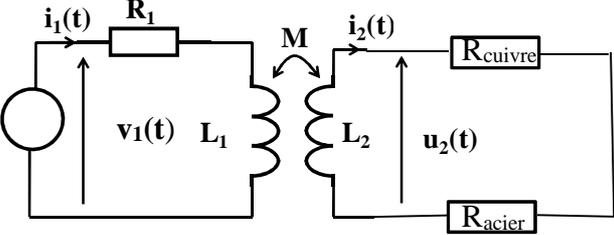
Lundi 4 décembre 2017

Durée : 1h30

<b>Exercice 1 : Modélisation de l'environnement électrostatique terrestre : 6 points + bonus : 0,5</b>	
<p><b>1.</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>L'étude des symétries montre que pour un point <math>M</math> quelconque, <u>tout plan contenant <math>O</math> et <math>M</math> est plan de symétrie de la distribution de charges.</u> Or, <u>le champ électrique est contenu dans les plans de symétrie.</u> Celui-ci est donc <u>selon <math>\overrightarrow{OM}</math></u> (direction commune de tous les plans) et est donc radial.</li> <li>L'étude des invariances montre que le champ électrique est invariant par rotation autour de n'importe quel axe passant par <math>O \rightarrow E</math> ne peut dépendre que de <math>r</math>.</li> <li>On a donc <math>\vec{E} = E_r(r)\vec{u}_r</math> en coordonnées sphériques</li> <li>Le théorème de Gauss appliqué à une sphère <u>de centre <math>O</math>, de rayon <math>r</math> compris <math>R</math> et <math>R + z_0</math> et orientée vers l'extérieur selon <math>\vec{u}_r</math></u>, donne rapidement : <math display="block">E_r = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}</math></li> </ul> <p><i>NB : On peut également utiliser les relations locales. Dans tous les cas, exiger un minimum de détails et de rigueur</i></p>	<p>3 x 0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,5</p> <p>0,5 (surface définie) + 0,25 (surface orientée)</p> <p>0,5</p>
<p><b>2.</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>Q = CV_0</math></li> <li><math>V_0 = V(R + z_0) - V(R) = \int_R^{R+z_0} dV = \int_R^{R+z_0} \overrightarrow{grad}V \cdot \vec{dl} = \int_R^{R+z_0} -\vec{E} \cdot \vec{dl}</math> avec <math>\vec{dl} = dr\vec{u}_r</math></li> </ul> <p><i>NB : Ne pas pénaliser les erreurs de signe assez nombreuses sur cette question</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>D'où <math>V_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R+z_0} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z_0}{R(R+z_0)}</math></li> <li>puis <math>C = \frac{Q}{V_0} = \epsilon_0 \frac{4\pi R(R+z_0)}{z_0}</math></li> <li>A.N. <math>C \approx 67\text{mF}</math> (avec unité correcte)</li> </ul>	<p>0,25</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
<p><b>3.</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>Q = CV_0 \approx 24\text{kC}</math></li> <li><math>E_R = 6,1\text{V} \cdot \text{m}^{-1}</math></li> </ul> <p><i>Exiger les unités correctes (sinon, 0,5/1)</i></p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p>
<p><b>4.</b> Comme <math>z_0 \ll R</math>, on peut écrire que :</p> $C = \epsilon_0 \frac{4\pi R^2 \left( 1 + \frac{z_0}{R} \right)}{z_0} \approx \epsilon_0 \frac{4\pi R^2}{z_0}, \text{ soit } C = \epsilon_0 \frac{S}{d} \text{ avec } S = 4\pi R^2 \text{ et } d = z_0$	<p><b>Bonus :</b></p> <p>0,5</p>

<b>Exercice 2 : Four à induction pour le traitement de tôles minces d'acier : 14 points+ bonus : 1,5</b>	
<b>A- Analyse qualitative du dispositif</b>	
<p><b>A1</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Le bobinage inducteur, alimenté par une tension sinusoïdale, crée un champ magnétique axial variable. Le flux de ce champ à travers le cylindre creux en (cuivre + acier) est variable <math>\rightarrow</math> phénomène d'induction statique (ou d'induction mutuelle) responsable de l'apparition d'une f.e.m. induite dans le cylindre et d'un courant induit (circuit fermé)</li> <li><b>Ou bien :</b> D'après l'équation de Maxwell-Faraday, la variation du champ magnétique <math>B</math> avec le temps conduit à l'apparition d'un champ électrique induit dans le cylindre et d'un courant induit de densité volumique <math>j = \gamma E</math>.</li> <li>Le passage de ce courant cause l'échauffement rapide du cylindre par <u>effet Joule</u></li> </ul>	<p>0,75 (enlever 0,25 par oubli ou imprécision)</p> <p>0,25</p>
<p><b>A2</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Le système {bobinage – cylindre creux} correspond à <u>deux circuits couplés</u></li> <li>Son principe de fonctionnement est équivalent à celui d'un transformateur ou bien de deux solénoïdes couplés (système étudié dans le <u>sujet de TD n°25</u>)</li> </ul>	<p>0,5</p> <p>0,5</p>

A3	<ul style="list-style-type: none"> <li>L'ARQP est justifiée <u>car la fréquence de la tension d'alimentation est faible (50 Hz).</u></li> <li>Dans ce régime, on a : <math>\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}</math> ; <math>\text{div}(\vec{B})=0</math> ;</li> </ul> $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ; \text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	0,5  0,5 (0 pour toute erreur)
<b>B- Analyse quantitative</b>		
B1	<ul style="list-style-type: none"> <li>Dans le modèle du solénoïde infini, tout plan perpendiculaire à l'axe z'z du solénoïde est plan de symétrie de la distribution de courant.</li> <li>Pour un point M à l'intérieur du solénoïde, celui-ci est sur un plan de symétrie. Or, le champ magnétique est perpendiculaire aux plans de symétrie <math>\rightarrow \vec{B}</math> est selon <math>\vec{u}_z</math></li> </ul>	0,5  0,5
B2	$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = B_0 \omega \sin(\omega t) \vec{u}_z \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = \frac{1}{r} \frac{\partial (rE_\theta)}{\partial r} \vec{u}_z$ <p>On a donc :</p> $\frac{\partial (rE_\theta)}{\partial r} = B_0 \omega r \sin(\omega t) \Rightarrow rE_\theta = \frac{B_0 \omega r^2}{2} \sin(\omega t) + f(t)$ $r=0, E_\theta=0 \Rightarrow f(t)=0$ <p>D'où : <math>E_\theta = \frac{B_0 \omega r}{2} \sin(\omega t)</math></p> <p>La circulation de E représente la f.e.m. induite dans le cylindre creux sur le cercle considéré</p>	0,5  0,25  0,25  0,5  <b>Bonus : 0,5</b>
B3	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\vec{j}_{ind} = \gamma_{Cu} \vec{E}_{ind} = \frac{\gamma_{Cu} B_0 \omega r}{2} \sin(\omega t) \vec{u}_\theta</math></li> <li><math>I_{ind} = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad \text{avec} \quad d\vec{S} = dr \cdot dz \vec{u}_\theta</math></li> </ul> $I_{ind} = \frac{\gamma_{Cu} B_0 \omega r}{2} \sin(\omega t) \int_a^b r dr \int_0^h dz = \frac{\gamma_{Cu} B_0 \omega h}{4} (b^2 - a^2) \sin(\omega t)$	0,25  0,5  0,5
B4	<p>a) <math>dP = \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau = \gamma_{Cu} \frac{(B_0 \omega r)^2}{4} \sin^2(\omega t) d\tau</math></p> <p><math>\langle dP \rangle_T = \gamma_{Cu} \frac{(B_0 \omega r)^2}{4} \langle \sin^2(\omega t) \rangle_T d\tau = \gamma_{Cu} \frac{(B_0 \omega r)^2}{8} d\tau \quad \text{avec} \quad d\tau = r d\theta dr dz</math></p> <p>b) <math>\langle P \rangle = \gamma_{Cu} \frac{(B_0 \omega)^2}{8} \left[ \int_0^{2\pi} d\theta \right] \left[ \int_0^h dz \right] \left[ \int_a^b r^3 dr \right] = \frac{2\pi h \gamma_{Cu} (B_0 \omega)^2}{32} (b^4 - a^4)</math></p> <p>c) <math>\langle P \rangle_T = R_{cylindre} \langle I^2 \rangle_T</math></p> <p><b>NB : le calcul (non demandé) conduirait à :</b></p> $R_{cylindre} = \langle P \rangle / \langle I_{ind}^2 \rangle = \frac{2\pi (b^4 - a^4)}{\gamma_{Cu} h (b^2 - a^2)^2} = \frac{2\pi (b^2 - a^2)(b^2 + a^2)}{\gamma_{Cu} h (b^2 - a^2)^2} = \frac{2\pi (b^2 + a^2)}{\gamma_{Cu} h (b^2 - a^2)}$	0,25  0,5 (pour le volume dt)  0,5 (0 pour toute erreur)  0,5
B5	<p>Dans ce cas, on peut considérer que :</p> $\vec{j}_{ind} = \frac{B_0 \gamma_{Cu} \omega a}{2} \sin(\omega t) \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad I_{ind} = \frac{\gamma_{Cu} B_0 \omega a h \epsilon}{2} \sin(\omega t) = kh$ <p>On en déduit : <math>\vec{k} = \frac{\gamma_{Cu} B_0 \omega a \epsilon}{2} \sin(\omega t) \vec{u}_\theta</math></p>	<b>Bonus :</b> 1 (à mettre pour une démonstration complète)

<p><b>B6</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>On remarque que la topographie du champ créé par le cylindre est la même qu'en <math>BI</math> : <math>\vec{B}</math> est selon <math>\vec{u}_z</math></li> <li>Pour le calcul du champ magnétique créé par le courant induit à l'intérieur du cylindre, on utilise la relation de passage traduisant la discontinuité de la composante tangentielle de <math>B</math> à une interface : <math display="block">\vec{n}_{1 \rightarrow 2} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{k} \quad \text{ou} \quad \vec{u}_r \wedge (\vec{B}_{ext} - \vec{B}_{int}) = \mu_0 \vec{k} \quad \text{avec} \quad \vec{B}_2 = \vec{B}_{ext} = \vec{0}</math> <p>On en déduit que : <math>\vec{B}_{int} = \mu_0 k \vec{u}_z = \frac{\mu_0 \gamma_{Cu} B_0 \omega a \epsilon}{2} \sin(\omega t) \vec{u}_z</math></p> <p><b>NB :</b> en pratique, le calcul de ce champ magnétique pour <math>a = 5 \text{ cm}</math> et <math>e = 1 \text{ mm}</math> montre que ce champ n'est pas négligeable devant le champ du bobinage inducteur : <math>\frac{\text{Amplitude de } B_{cylindre}}{\text{Amplitude de } B_{bobinage}} = \frac{\mu_0 \gamma_{Cu} \omega a \epsilon}{2} = 0,49</math></p> <p>Il faudrait donc le prendre en compte dans les équations de Maxwell</p> </li> <li>Pour le calcul de l'inductance, une méthode consiste à calculer le flux propre : <math display="block">\vec{k} = \frac{I_{ind}}{h} \vec{u}_\theta</math> <math display="block">\Phi = B.S = \left( \mu_0 \frac{I_{ind}}{h} \right) \pi a^2 = L I_{ind}, \text{ soit : } L = \mu_0 \frac{\pi a^2}{h}</math> <p><b>NB :</b> accepter le calcul à partir de la densité volumique d'énergie magnétique</p> </li> </ul>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5 (0 pour toute erreur)</p>
<p><b>B7</b></p>	 <p><math>\underline{v}_1 = (R_1 + jL_1\omega) \underline{i}_1 + jM \omega \underline{i}_2</math></p> <p><math>jM \omega \underline{i}_1 + jL_2 \omega \underline{i}_2 + (R_{cuivre} + R_{acier}) \underline{i}_2 = 0</math></p>	<p>1</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
<p><b>B8</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Le courant étant le même dans les deux parties du circuit, on en déduit que les pertes par effet Joule sont plus grandes dans l'acier que dans le cuivre.</li> <li>Ceci traduit une résistance plus grande de la partie en acier par rapport à celle de la partie en cuivre, soit : <math>R_{acier} = \frac{L_{acier}}{\gamma_{acier} h \epsilon} &gt; R_{cuivre} = \frac{L_{cuivre}}{\gamma_{cuivre} h \epsilon}</math></li> <li>La résistance plus grande de l'acier peut être attribuée au fait que la conductivité de l'acier est plus faible que celle du cuivre</li> <li><b>Remarque :</b> la température de fusion des deux métaux n'était pas fournie dans l'énoncé mais <math>T_f(\text{acier}) &gt; T_f(\text{cuivre})</math>. Si des étudiants évoquent la différence de température de fusion des 2 métaux pour expliquer la fusion de l'acier, mettre 0,5/1 (même si ce n'est pas la bonne explication !)</li> </ul> <p><b>NB :</b> dans le système réel, l'échantillon en acier est placé entre deux blocs qui jouent le rôle d'écran magnétique. Ainsi, la tôle d'acier ne voit pas le champ magnétique. Le courant est donc induit dans la portion en cuivre du porte échantillon, puis il est transmis à la tôle d'acier qui chauffe simplement par effet Joule.</p>	<p>1 (0,5 si trop imprécis)</p>