

Interrogation de Physique n° 2

Lundi 4 Décembre 2017

Durée : 1h30

Barème indicatif : exercice I : 6 points, exercice II : 14 points.

Le sujet est constitué de deux exercices totalement indépendants.

Exercice I – Modélisation de l’environnement électrostatique terrestre

Remarque préliminaire : les questions de cet exercice présentent volontairement une rédaction « peu guidée ». Vous devrez fournir toutes les explications nécessaires à la résolution de ces questions. La notation en tiendra compte.

D’un point de vue électrostatique, on peut modéliser la Terre par un conducteur sphérique de rayon R , portant une charge négative $-Q$ ($Q > 0$), et dont le potentiel est fixé par convention à $0V$. Autour de la Terre, on trouve, d’abord, une atmosphère électriquement neutre (dont la permittivité sera supposée égale à celle du vide) ; puis l’ionosphère.

Si l’ionosphère est, en réalité, une zone de charges volumiques, on considèrera ici pour simplifier qu’on peut la modéliser par une surface équipotentielle V_0 située à l’altitude z_0 et portant la charge $+Q$. Ce modèle correspond donc à celui d’un condensateur sphérique. Il est schématisé sur la figure 1. On donne : $R = 6000 \text{ km}$, $z_0 = 60 \text{ km}$, $V_0 = 360 \text{ kV}$ et $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9} \text{ F/m}$.

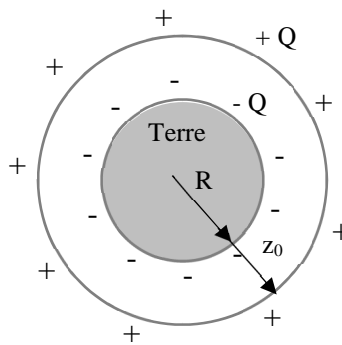


Figure 1 : Schéma du condensateur sphérique formé par la Terre et l’ionosphère.

1. Déterminer l’expression du champ électrostatique en un point quelconque de l’atmosphère, c’est-à-dire à une distance r du centre de la Terre comprise entre R et $R + z_0$. Vous donnerez cette expression en fonction des données fournies dans l’énoncé.
2. En déduire l’expression de la capacité du condensateur sphérique, puis sa valeur numérique.
3. Déduire de ce qui précède la valeur numérique de la norme du champ électrique à la surface de la Terre. Expliquer votre démarche et détailler les étapes de calcul.
4. **Question bonus** : A partir des données numériques fournies pour R et z_0 , justifier le fait que le système se comporte comme un condensateur plan ayant des armatures de surface S (à préciser) écartées d’une distance d (à préciser).

Exercice II – Four à induction pour le traitement de tôles minces d'acier

Contexte de l'étude

Dans le domaine de la métallurgie, de nombreuses études portent sur l'effet des paramètres des cycles thermiques appliqués (voir figure 2) à un matériau métallique donné sur ses propriétés mécaniques. En particulier, la vitesse de chauffe (V_c) peut jouer un grand rôle. Avec les technologies classiquement utilisées industriellement pour traiter des tôles minces d'aciers pour l'automobile, les vitesses de chauffe sont relativement limitées ($\leq 30^\circ\text{C/s}$). Avec un chauffage par induction, il est possible d'obtenir des vitesses de chauffe beaucoup plus élevées (100 à 300°C/s) selon l'épaisseur des tôles traitées. Ceci peut avoir un effet très bénéfique sur les propriétés de résistance mécanique des tôles.

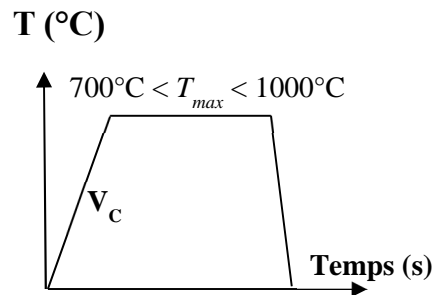


Figure 2 : Exemple de cycle thermique appliqué en 3 étapes : i) un chauffage avec la vitesse de chauffe V_c , ii) un maintien à la température T_{max} et iii) un refroidissement.

Dispositif étudié

Afin d'étudier l'influence d'un chauffage rapide par induction sur des tôles minces d'acier, un dispositif expérimental a été mis en place dans l'un des laboratoires de l'INSA. Nous travaillerons à partir du schéma simplifié du dispositif montré sur la figure 3.a. Ce dispositif est constitué :

- i) d'un bobinage inducteur (solénoïde), d'axe $z'z$ vertical et d'unitaire \vec{u}_z , comportant N spires jointives enroulées sur un cylindre de rayon R et de hauteur H . Ce bobinage est alimenté par une tension sinusoïdale $v_1 = V_0 \cos(\omega t)$ de basse fréquence (50 Hz),
- ii) d'un porte-échantillon que l'on vient introduire à l'intérieur du bobinage inducteur. Celui-ci est constitué d'un cylindre creux en cuivre, d'axe $z'z$, de hauteur h ($\ll H$), de rayon intérieur a ($< R$) et de rayon extérieur b . Sur une portion du cylindre, on vient intercaler une tôle d'acier de longueur L , de hauteur h et d'épaisseur $(b-a)$. Le cylindre creux est placé à mi-hauteur du bobinage inducteur.

NB : Le dispositif réel (plus complexe) est montré à titre indicatif sur la figure 3.b. L'échantillon en acier (placé entre deux blocs) n'est pas visible sur la vue du dispositif réel.

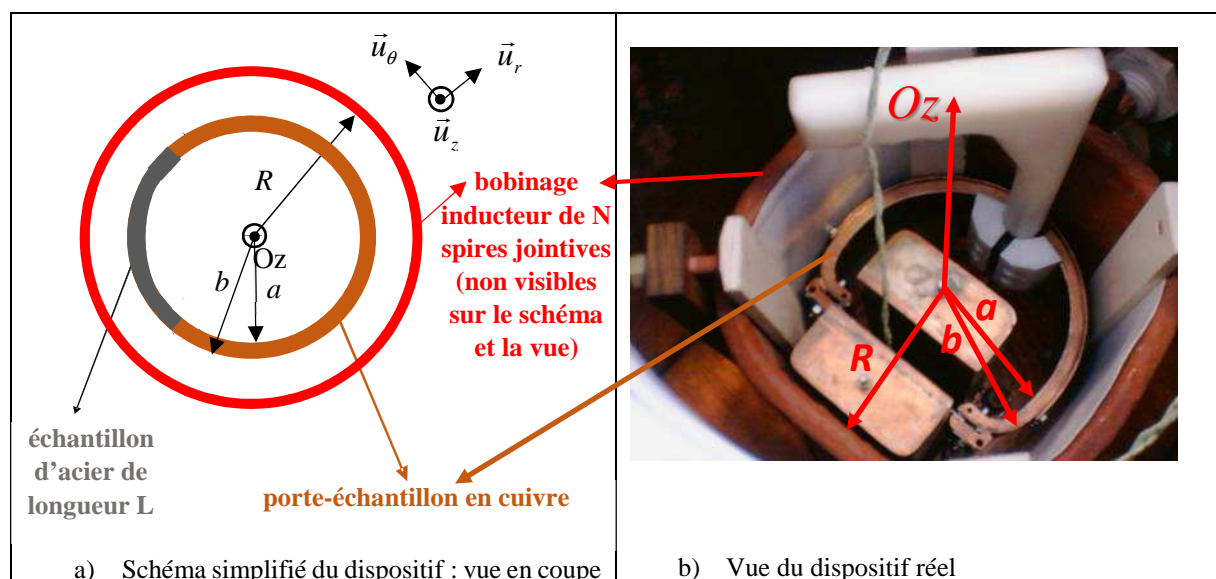


Figure 3

Données utiles et hypothèses de travail :

- On rappelle la forme la plus générale des équations locales de Maxwell dans le vide :

$$\overline{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \overline{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ avec } \vec{j} = \gamma \vec{E} ; \quad \text{div}(\vec{B}) = 0$$

- De plus, on donne l'expression du rotationnel et de la divergence en coordonnées cylindriques pour un vecteur $\vec{X} = X_r \vec{u}_r + X_\theta \vec{u}_\theta + X_z \vec{u}_z$:

$$\overline{\text{rot}}(\vec{X}) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial X_z}{\partial \theta} - \frac{\partial (rX_\theta)}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial X_r}{\partial z} - \frac{\partial X_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (rX_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial X_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

$$\text{div}(\vec{X}) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (rX_r)}{\partial r} + \frac{\partial (X_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (rX_z)}{\partial z} \right)$$

- La conductivité électrique du cuivre (γ_{Cu}) est égale à $5 \times 10^7 \text{ S.m}^{-1}$ et celle de l'acier (γ_{Fe}) est $1 \times 10^7 \text{ S.m}^{-1}$.
- Pour simplifier, on considèrera que la permittivité diélectrique et la perméabilité magnétique du cuivre et de l'acier sont identiques et égales à ϵ_0 et μ_0 .
- Bien que de longueur finie, le bobinage inducteur et le cylindre creux seront considérés infinis.

A- Analyse qualitative du dispositif

- Décrire (en quelques lignes et sans calculs) tous les phénomènes physiques mis en jeu dans le dispositif et qui permettent d'expliquer le chauffage rapide de l'échantillon en acier.
- Que peut-on dire du système {bobinage inducteur – cylindre creux} ? A quel(s) dispositif(s) vu(s) en TD est-il équivalent ? Justifier brièvement.
- Pourquoi l'approximation des régimes quasi-permanents (ARQP) semble être justifiée pour l'étude de ce dispositif ? Comment s'écrivent les équations de Maxwell dans ce type de régime ? **NB : Aucun calcul et aucune justification n'est exigée ici.**

B- Analyse quantitative

Pour l'analyse quantitative, nous allons considérer différentes situations.

1^{er} cas : le cylindre creux a une épaisseur (b-a) non négligeable et est supposé constitué d'un seul matériau (le cuivre)

- Le champ magnétique produit par le bobinage inducteur est uniforme et de la forme : $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$. Justifier rigoureusement la direction de \vec{B} .
- Compte-tenu des symétries et invariances du dispositif, on fera l'hypothèse que le champ électrique induit est de la forme $\vec{E}_{ind} = \vec{E}_\theta(r, t) \vec{u}_\theta$ et est tel que $\vec{E}_\theta(r=0, t) = 0$. Calculer le champ électrique induit \vec{E}_{ind} dans le cylindre creux à partir d'une équation locale de Maxwell. Que représente la circulation de \vec{E}_{ind} le long d'un cercle de rayon r d'axe $z'z$?
- Déduire de ce qui précède la densité volumique de courants induits, \vec{j}_{ind} , dits courants de Foucault, puis le courant I_{ind} circulant dans le cylindre en fonction de $a, b, \gamma_{Cu}, B_0, \omega, h$ et t .

4- La puissance volumique $dP/d\tau$ cédée par le champ électrique à la matière conductrice est égale à $\vec{j}_{ind} \cdot \vec{E}_{ind}$.

- Calculer la puissance instantanée dP cédée dans un volume $d\tau$, puis la puissance moyenne dissipée $\langle dP \rangle_T$ sur une période temporelle, sachant que $\langle \sin^2(\omega t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt = \frac{1}{2}$.
- En déduire la puissance moyenne $\langle P \rangle_T$ dissipée dans tout le volume du cylindre.
- Par quelle formule, cette puissance est-elle reliée à la résistance électrique du cylindre $R_{cylindre}$?

Remarque (aucun calcul demandé) : on peut établir que pour un cylindre en cuivre d'épaisseur $\varepsilon = b-a$ très faible, cette résistance s'écrit sous la forme suivante : $R_{cylindre} = \frac{2\pi a}{\gamma_{Cu} h \varepsilon}$

2^{ème} cas : le cylindre creux a une épaisseur $\varepsilon = b-a$ très faible et est supposé constitué d'un seul matériau (le cuivre)

Dans ce cas, le courant qui circule dans le cylindre creux, supposé de rayon a , est un courant surfacique auquel on peut associer une densité superficielle de courant \vec{k} . A partir de l'étude menée précédemment, on peut établir que $\vec{k} = \frac{\gamma_{Cu} B_0 \omega a \varepsilon}{2} \sin(\omega t) \vec{u}_\theta$.

5- **Question bonus :** Montrer que $\vec{k} = \frac{\gamma_{Cu} B_0 \omega a \varepsilon}{2} \sin(\omega t) \vec{u}_\theta$.

6- On souhaite calculer le champ magnétique créé par le cylindre creux. En utilisant le fait que le champ est nul à l'extérieur du cylindre et en considérant qu'il est uniforme à l'intérieur de celui-ci, donner l'expression du champ magnétique à l'intérieur du cylindre à l'aide d'une relation de passage. En déduire l'inductance propre du cylindre.

3^{ème} cas : le cylindre creux a une épaisseur $\varepsilon = b-a$ très faible et est constitué de deux portions (l'une en cuivre et l'autre en acier)

7- Faire le schéma électrique équivalent du dispositif étudié (bobinage inducteur + cylindre) en faisant apparaître toutes les grandeurs électriques pertinentes. Ecrire les équations électriques pour chaque circuit **en régime sinusoïdal forcé**.

8- Le dispositif réel permet, dans certaines conditions, de faire fondre l'échantillon d'acier tout en préservant la portion de cylindre en cuivre. A votre avis, à quoi cela peut-il être dû ?