INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

PC Deuxième Année | Année 2018-2019

Physique : Interrogation n°3

Lundi 11 Mars | Durée : 1h30

***Barème indicatif* : exercice 1 sur 9 points, exercice 2 sur 8 points, questions de cours sur 3 points**

Le sujet est constitué de deux exercices indépendants

Document autorisé : une feuille de synthèse recto-verso manuscrite originale

Calculatrice autorisée : tout type, non connectée

Téléphone portable non autorisé

Exercice 1 : Son et musique/Tuyau d'orgue

L'orgue est un instrument à vent dont la caractéristique est de produire les sons à l'aide d'ensembles de tuyaux sonores accordés suivant une gamme définie et alimentés par une soufflerie. Il peut comporter jusqu'à plusieurs milliers de tuyaux (8000 pour l'orgue de Notre-Dame de Paris). Un tuyau présente à sa base une petite ouverture appelée "bouche" (voir ci-dessous) de telle sorte qu'il se comporte comme un tuyau ouvert à ses deux extrémités.

On modélise donc chaque tuyau d'orgue par un tube cylindrique d'axe Ox, de section S et de longueur L, ouvert à l'air libre à ses deux extrémités. L'air est à la pression atmosphérique moyenne P_0. La vitesse du son dans l'air vaut c= 340 m/s.

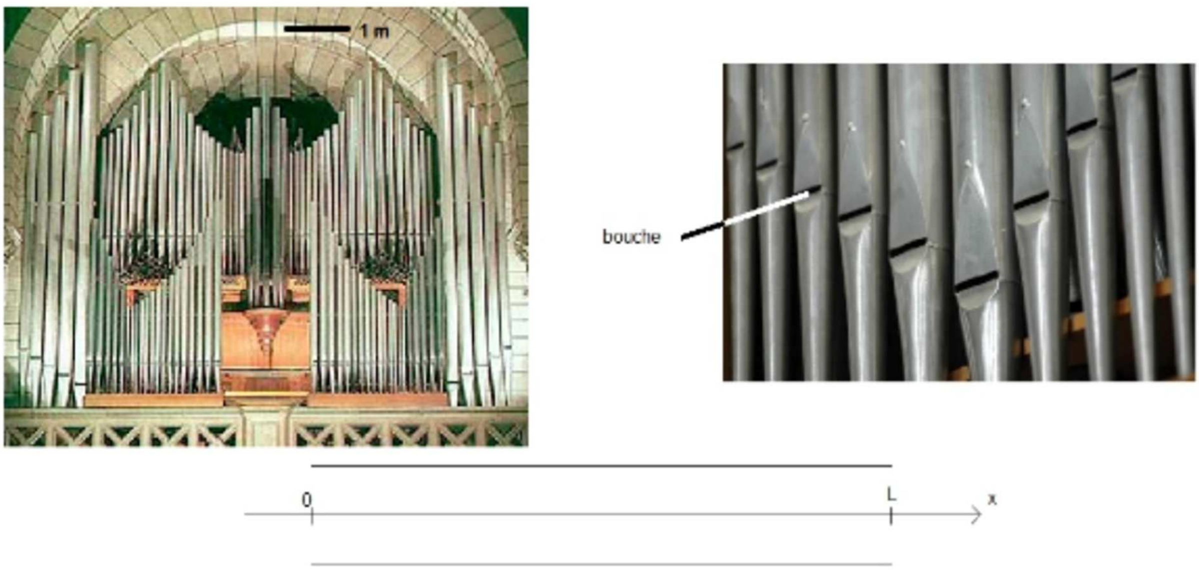

Figure 1. Modèle du tuyau d'orgue

Echelle donnée au dessus de la photo de l'orgue (trait noir représente 1 m)

On recherche le champ de surpression $p(x,t)$ de l'onde sonore dans la cavité comme une superposition d'ondes stationnaires, chacune de la forme $A\cos(\omega t+\varphi)\cos(kx+\phi)$.

1) justifier en une ou deux phrases la présence d'un nœud de surpression à chaque extrémité du tuyau.

2) Rappeler l'équation de d'Alembert vérifiée par la surpression dans la cavité. Cette équation fera intervenir la vitesse du son, c. En considérant une onde stationnaire de surpression solution de l'équation précédente de d'Alembert, en déduire la relation entre k, ω et c.

3) Montrer que seules certaines ondes stationnaires sont possibles et exprimer leur fréquence f_p en fonction de L, c et un entier p. Ce sont les modes propres de la cavité acoustique, de fréquence propre f_p.

Représenter en fonction de x, les modes p=1 et p=2 dans le tuyau pour l'onde de surpression (on tracera l'enveloppe de l'onde de surpression)

4) En pratique tous les tuyaux d'un orgue ne sont pas identiques. Les notes les plus graves sont jouées par les tuyaux dits "bourdons" qui sont fermés à une extrémité.

En s'appuyant uniquement sur un schéma et les conditions aux limites (que vous préciserez), déterminer les nouveaux modes propres dans la cavité et représenter en fonction de x, les modes p=1 et p=2 dans le tuyau pour l'onde de surpression (Remarque : les modes p=1 et p=2 correspondent respectivement au 2ème et 3ème mode, le premier mode étant le mode fondamental pour lequel p=0).

Dans toute la suite, nous considèrerons uniquement le cas des tuyaux ouverts aux 2 extrémités.

5) Le son joué par un tuyau d'orgue est la superposition de tous les modes propres possibles. La fréquence fondamentale f_1 donnera la note. Les autres fréquences sont appelées harmoniques, elles contribuent au timbre du son. Dans un orgue, chaque note n est jouée par un tuyau de longueur L_n

La gamme musicale que nous utilisons de nos jours est celle de la gamme tempérée. Cette dernière a été imposée à l'ensemble de la musique européenne, en particulier sous l'impulsion de J.S. Bach et de J.-P. Rameau. Elle est constituée d'octaves. Chaque octave rassemble 12 notes, séparées par un demi-ton. On divise l'octave en 12 intervalles.

Note	*Do*	*Do#*	*Ré*	*Ré#*	*Mi*	*Fa*	*Fa#*	*Sol*	*Sol#*	*La*	*La#*	*Si*
Fréquence	$f^{(0)}$	$f^{(1)}$	$f^{(2)}$	$f^{(3)}$	$f^{(4)}$	$f^{(5)}$	$f^{(6)}$	$f^{(7)}$	$f^{(8)}$	$f^{(9)}$	$f^{(10)}$	$f^{(11)}$

Les fréquences des notes, $f^{(n)}$, sont les termes d'une suite géométrique de raison $2^{1/12}$. On passe ainsi d'une note à la suivante par la relation :

$$f^{(n+1)} = f^{(n)}\, 2^{1/12}$$

La fréquence d'une note est ainsi doublée lorsque l'on passe d'une octave à l'octave supérieure.

Exprimer la fréquence $f^{(n)}$ en fonction de $f^{(0)}$ dans une octave i donnée.

6) La fréquence du la_3 (la pour l'octave 3), généralement prise comme référence, vaut 440 Hz. En déduire les valeurs numériques des fréquences du do_3, du do_2 et du do_1. On rappelle que les octaves sont numérotées dans l'ordre des fréquences croissantes.

7) Donner l'ordre de grandeur de la plus haute fréquence que peut jouer l'orgue d'après la photo de la figure 1. **L'échelle est donnée en haut de la photo de l'orgue (le trait noir représente 1 m)**. Faire de même pour la fréquence la plus grave.

8) La note la plus grave jouée par l'orgue de la chapelle des buis de Besançon est un fa_2. La longueur du tuyau correspondant à cette note est L_g. Exprimer la longueur L_i du tuyau jouant la note de fréquence f_i (plus élevée que celle du fa_2) en fonction de L_g et d'un entier i, avec (i-1) le nombre de notes existant entre la note fa_2 et la note considérée. En quoi cette relation est en accord avec la forme globale de l'orgue. Retrouver vous expérimentalement à partir de mesures sur la photo de l'orgue la relation précédente ?

Exercice 2 : Guide d'onde plan à saut d'indice

<u>Un formulaire d'analyse vectorielle vous est donné à la toute fin du sujet</u>

On considère un guide d'onde plan à saut d'indice de réfraction représenté sur la figure 2. Un tel guide permet de faire propager une onde sur une distance donnée. Il est constitué de deux milieux diélectriques non chargés semi-infinis suivant les directions des axes Oy et Oz, le cœur et la gaine, (isolants γ=0, de perméabilité magnétique μ_0, de permittivité diélectrique ε_c etε_g respectivement). Ces deux milieux ont pour indice respectivement n_c et n_g. Le milieu constituant le cœur a une épaisseur *a*.

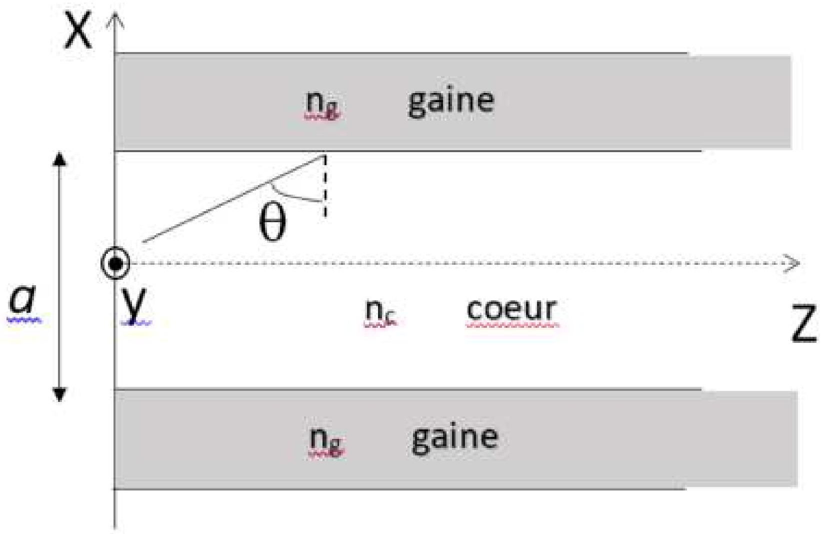

Figure 2. Schéma du guide d'onde

Grâce au phénomène de réflexion totale au niveau des interfaces, il est possible d'obtenir au sein du cœur une onde se propageant dans la direction de l'axe Oz, sans atténuation. Le vecteur d'onde et la pulsation de l'onde vérifient alors une relation (dite de dispersion) qu'il s'agit de déterminer ici.

On considèrera donc ici un mode dit « transverse électrique **» où seuls E_y, B_x et B_z sont non nuls.**

1) En utilisant la loi de Snell-Descartes, rappeler à quelle condition sur les indices n_c et n_g, , il peut exister, au-delà d'un certain angle d'incidence critique θ_c , un phénomène de réflexion totale à l'interface cœur-gaine. Exprimer θ_c en fonction de n_c et n_g.

2) **Etablir** l'équation aux dérivées partielles qui décrit la propagation du champ $\vec{E}$ dans un milieu diélectrique de perméabilité magnétique μ_0, de permittivité diélectrique ε et non chargé. On fera apparaitre la vitesse c de la lumière dans le vide et l'indice n du milieu.

On recherche des solutions à l'équation précédente de la forme $\underline{E_y}(x,y,z,t) = \underline{f(x)}\,\underline{g(z)}e^{j\omega t}$, pour une onde qu'on suppose se propageant suivant z et qui reste confinée suivant x. $\underline{f(x)}$ **et** $\underline{g(z)}$ **sont a priori des fonctions complexes.**

3) Montrer que l'équation établie en 2) conduit à la relation suivante :

$$\frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{g''(z)}{g(z)} = -\frac{\omega^2 n^2}{c^2}$$

En considérant que l'onde se propage sans atténuation et uniquement selon z croissant, donner la forme que doit prendre $\underline{g(z)}$**.** On fera apparaitre dans son expression une constante k_z . Pourquoi cette constante doit-elle être réelle ?

Montrer que $\dfrac{\underline{g''(z)}}{\underline{g(z)}} = -k_z^2$

4) Pour décrire la distribution de champ dans le guide plan, il nous faut traiter séparément les deux milieux qui constituent le guide : le cœur d'indice n_c pour lequel $-\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2}$ et la gaine d'indice n_g pour laquelle $x \ge \frac{a}{2}$ et $x \le -\frac{a}{2}$.

Dans le cœur, on veut que la solution présente le long de l'axe x (c'est-à-dire pour y et z constants), un profil sinusoïdal pair de la forme $f_c(x) = A\cos(k_{cx}x)$, avec k_{cx} réel. Par ailleurs, dans la gaine, on veut que la solution décrive une atténuation de l'onde lorsqu'elle pénètre dans cette gaine : $f_g(x) = C'\exp\left(-k_{gx}\left(|x| - \frac{a}{2}\right)\right)$, avec k_{gx} réel.

Déduire des équations précédentes appliquées à chacun des milieux une relation entre k_{cx}, k_z, n_c, ω, et c d'une part, et entre k_{gx}, k_z, n_g, ω, et c d'autre part.

En déduire une inégalité entre $\frac{n_g \omega}{c}$, k_z et $\frac{n_c \omega}{c}$. Montrer que l'on retrouve ainsi la condition explicitée en question 1 sur n_c et n_g.

5) A partir des relations de passage, à l'interface entre les deux milieux en $x = \frac{a}{2}$, pour les **composantes tangentielles** du champ $\vec{E}$ puis du champ $\vec{B}$, démontrer la relation $\tan(k_{cx}\frac{a}{2}) = \frac{k_{gx}}{k_{cx}}$. *Aide : on devra au préalable déduire le champ $\vec{B}$ du champ $\vec{E}$.*

6) Donner l'allure schématique de la fonction f(x) en fonction de x.

7) A partir des relations trouvées en 4) et 5), déduire l'équation reliant k_z, c, n_g, n_c et ω, c'est-à-dire reliant k_z aux caractéristiques du guide d'onde et à la pulsation.
On définit ainsi une équation qui accepte plusieurs solutions correspondant aux différents modes du guide d'onde.

Questions de cours :

Question 1 : Un émetteur de micro-ondes de fréquence f = 3 GHz produit une onde plane, progressive, uniforme dans l'air (assimilé au vide). L'onde ainsi émise aborde, en incidence normale, une plaque métallique de conductivité électrique supposée infinie. On négligera tout phénomène d'atténuation de l'amplitude des ondes lors de leur propagation dans l'air.

Veuillez choisir au moins une réponse :

☐ a. A l'intérieur de la plaque métallique, on a propagation d'une onde plane, progressive, uniforme et amortie

☐ b. L'onde résultante obtenue entre l'émetteur et la plaque métallique est imparfaitement stationnaire

☐ c. A une distance de 0,35 m de la plaque, sur l'axe reliant l'émetteur à la plaque, le champ électrique résultant a une amplitude nulle

☐ d. A une distance de 0,60 m de la plaque sur l'axe reliant l'émetteur à la plaque, le champ électrique résultant a une amplitude maximale

Question 2 : Une onde plane progressive uniforme arrive en incidence normale: i) sur une interface séparant deux milieux semi-infinis (notés 1 et 2) d'impédance spécifique différente ou bien ii) à l'extrémité d'un milieu de propagation. Parmi les cas évoqués ci-dessous, indiquer la (ou les)quelle(s) conduit(sent) à l'obtention d'ondes **parfaitement stationnaires** dans le milieu 1.

Veuillez choisir au moins une réponse :

☐ a. Cas des ondes EM : milieu 1 = diélectrique parfait non chargé ; milieu 2 = diélectrique parfait non chargé

☐ b. Cas des ondes acoustiques dans un tuyau : milieu 1 = fluide d'impédance Z1 ; milieu 2 = fluide d'impédance Z2

☐ c. Cas des ondes acoustiques dans un tuyau : ondes arrivant sur une extrémité ouverte

☐ d. Cas des ondes élastiques sur une corde : ondes arrivant sur une extrémité libre

Formulaire d'analyse vectorielle en coordonnées cartésiennes, dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$:

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{a}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\vec{a}) - \vec{\Delta}\vec{a}$$

$$\vec{\Delta}\vec{a} = \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}\right)\overrightarrow{e_x} + \left(\frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2}\right)\overrightarrow{e_y} + \left(\frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2}\right)\overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_x} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\overrightarrow{e_y} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{e_z}$$

Equations de Maxwell dans un milieu quelconque:

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\frac{\vec{B}}{\mu}\right) = \vec{j} + \varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, div\left(\varepsilon\vec{E}\right) = \rho, div\vec{B} = 0$$