

Physics test n° 1 – semester 4

Monday 14th March 2022

Duration: 1h30

Indicative marking scheme: exercise 1 out of 8 points, exercise 2 out of 12 points.

No documents allowed, calculators permitted

Not only your results will be marked, but above all your capacity to clearly justify and analyse them in a critical manner will be evaluated. The mark scheme given above is purely indicative.

Exercise 1: Electromagnetic wave between 2 conducting plates (~8 pts)

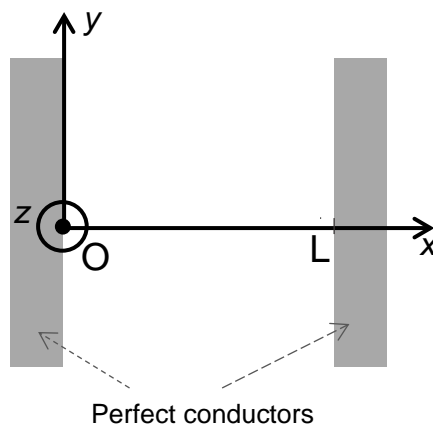


Figure 1 – Sketch of the system made of two conducting plates.

Two **perfectly conducting plates** (of conductivity $\gamma \rightarrow +\infty$) are placed **in vacuum**, one at $x = 0$ and the other one at $x = L$ (see Figure 1). The plates are considered infinite along y and z . An electromagnetic wave is injected between the two plates whose electric field \vec{E} has the angular frequency ω , is polarized linearly along \vec{u}_y , and propagates along \vec{u}_x along increasing x .

We consider that Snell-Descartes' laws are verified and that **all the electric fields existing between the plates have the same direction of polarization**.

1. What happens in relation with the propagation of the incident wave?
2. By detailing all the steps of your reasoning and making a rigorous demonstration, determine the expression of $\vec{E}_{\text{tot}}(x, t)$, the total electric field that establishes itself between the 2 plates.

We inject now a superposition made of an infinity of waves having an angular frequency comprised between $2 \times 10^9 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ and $3 \times 10^9 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. The length L is given to be: $L = 1 \text{ m}$.

3. Why can we say that this device works as a filter? Justify the value of ω selected by this filter and plot the shape of the amplitude of the total electric field between the two plates as a function of x , considering x comprised between 0 and L .

Exercise 2: Non-destructive inspection using ultrasound (~12 pts)

We focus now on the principle of the non-destructive inspection of mechanical components using an ultrasound wave. A piezo-electric emitter generates, at $x = -e$, a pulse in a thin layer ($e = 50 \mu\text{m}$) of coupling gel, applied to the top surface of an aluminium block (of thickness $L \gg e$), as shown in Figure 2. All the relevant densities and sound speeds are given in Table 1.

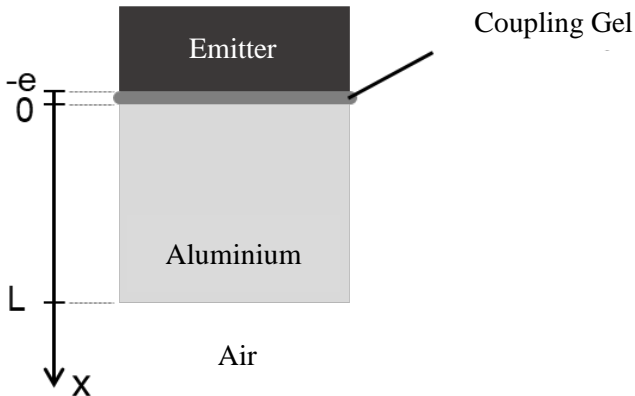


Table 1 – Speed of sound (V) and density (ρ) in the different materials.

	V ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)	ρ ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)
Coupling gel	1500	1000
Aluminium	6400	2700
Air	330	1,2

Figure 2 – Structure of the studied setup.

For sake of simplicity, we consider that the emitter produces an overpressure pulse in the gel (at $x = -e$) of Gaussian form (see Figure 3), in normal incidence, and expressed as:

$$p_0(-2a < t < +2a) = P_0 e^{-\frac{t^2}{2a^2}}$$

$$p_0(t) = 0 \text{ otherwise}$$

where $a = 5 \times 10^{-9}$ s, and $4a$ is considered to be the temporal width of the pulse. We remind you of the expression of the acoustic impedance $Z = \rho V$.

In the whole of this exercise we shall consider that there are no reflections at the interface between the emitter and the coupling gel.

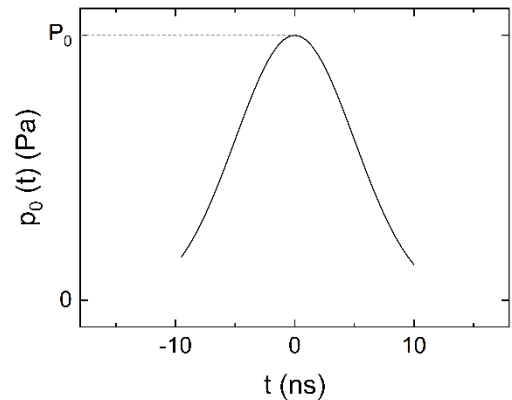


Figure 3 – Overpressure in the coupling gel (at $x = -e$).

A. Acoustic pulse propagation

Bonus question: Give the expression of $p_i(x, t)$, the acoustic pulse that propagates in the coupling gel in the direction of the increasing x .

1. What is the spatial extension of the pulse, that we shall denote D , in the gel? What is the propagation time required for the pulse's peak to arrive at the gel/aluminium interface? Give all the numerical applications.
2. In this question, we consider that the coupling gel and the aluminium are semi-infinite media. Using the continuity relations at the gel/aluminium interface, express the reflection and transmission coefficients (of overpressure amplitude), r and t , as a function of the acoustic impedances. Do the numerical applications.
3. Given the kind of perturbation studied in this exercise, justify without complicated calculations that the semi-infinite hypothesis made in the previous question can indeed be applied to both the gel/aluminium and aluminium/air interfaces.
4. At what instant t_1 does the pulse completely leave the gel/aluminium interface? Sketch the shape of the overpressure observed in both media as a function of x , and at a fixed time $t = t_1$. Indicate clearly the important values of the overpressure and of x .
5. Draw a graph of the overpressure as a function of x observed for $t = t_1 - 2a$. Indicate clearly the important values of the overpressure and of x .

6. What are the values of the coefficients (of overpressure amplitude) r' and t' for the aluminium/air interface at $x = L$? Comment this result. Draw a graph of the incident (p_i'), reflected (p_r') and transmitted (p_t') overpressure components as a function of x , for $t_2 = \frac{e}{V_{\text{gel}}} + \frac{L}{V_{\text{Al}}}$, where V_{Al} is the speed of sound in the aluminium and V_{gel} that in the gel.

B. Application: detection of defects

The piezoelectric emitter also plays the role of a pressure sensor. At the instant at which the maximum of the pulse is emitted, a stopwatch is started, and the emitter become a detector of instantaneous acoustic intensity, $I = \frac{p^2}{Z}$.

We suspect that **a crack is present** in the aluminium plate and will use the emitter/detector device to confirm this hypothesis. Figure 4 shows the detected acoustic intensity as a function of time, starting from the moment of emission of the acoustic pulse (the incident pulse is not represented). We have limited the timescale to show only the 3 first events recorded.

To simplify the problem, we consider that **there is no reflection when the signals enter the detector**, and that **Figure 4 directly gives the acoustic intensity of the waves in the gel** (obtained by applying an appropriate multiplication factor to the signal measured by the detector).

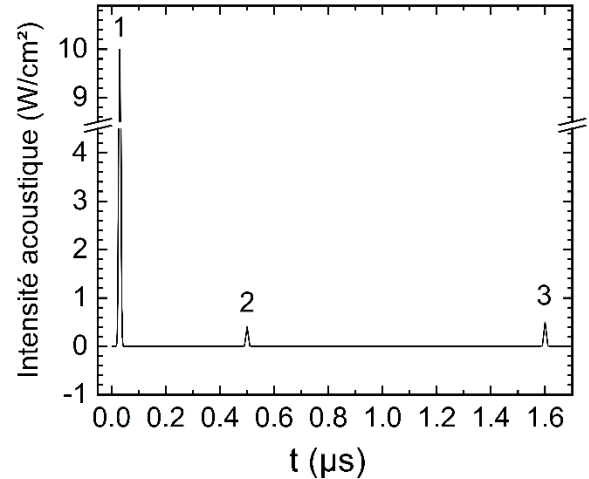


Figure 4 – Diagram of the acoustic intensity detected as a function of time, starting from the emission of the acoustic pulse.

7. Give the physical origins of the peaks represented in Figure 4. By reading from the graph, deduce the thickness L of the aluminium plate and the depth of the crack.

We remind you that the **intensity-based** reflection coefficient, R , is given by $R = r^2$. It is linked to the intensity-based transmission coefficient, T , by the relationship: $R + T = 1$.

By placing the emitter/detector device above a **non-defective region** of the aluminium plate (containing no cracks), we obtain only two peaks (as shown in Figure 5), with amplitudes (in the gel) of approximately $I_1 \approx 10 \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$ for peak 1 and $I_3 \approx 1 \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$ for peak 3.

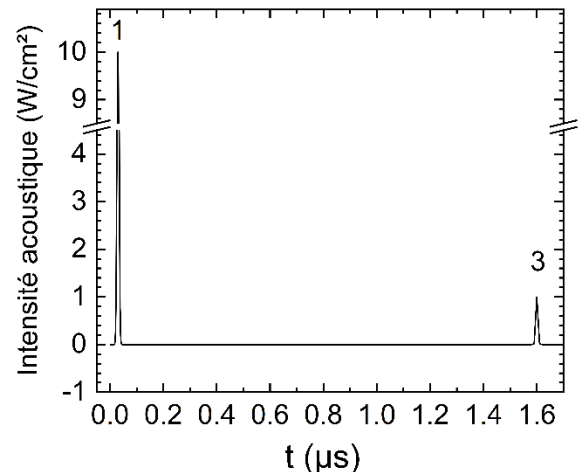


Figure 5 - Diagram of the acoustic intensity detected as a function of time, obtained for a defect-free region.

8. Through a reasoning based on the displayed acoustic intensities, determine the approximate value of the maximum acoustic intensity emitted **in the gel**, I_0 . Determine the theoretical value of the intensity of peak 3 (in the gel), then comment on the measured value.

Corrigé de l'interrogation de Physique n° 1 – semestre 4

Lundi 14 mars 2022

Durée : 1h30

Exercice 1 (peu guidé) : /7,5		Total 7,5 B :0,25
Q1 /1.5 B : +0,25	<p>On a reflexion des ondes au niveau des plans $x=0$ et $x=L$ car changement de milieu. (D'après l'énoncé et Snell Descartes, les ondes réfléchies garde la meme direction de polarisation, et se propage toujours selon l'axe x car les plans de reflexion sont perpendiculaires à cette axe)</p> <p>Les ondes incidente et réfléchie se superposent entre les deux plans conducteurs pour former une onde stationnaire.</p> <p>Bonus : Il y a présence de nœud et de ventre du champ électrique total en certains points de l'espace</p> <p>La continuité du champ total en 0 et en L impose l'existence de nœuds en $x=0$ et en $x=L$, par conséquent on peut en déduire que les pulsations des ondes pouvant exister entre les deux conducteurs seront quantifiées et seules les modes propres de vibrations pourront exister.</p>	<p>/0,5 (si justification)</p> <p>/0,5</p> <p>B :+0,25</p> <p>/0,25+0,25</p>
Q2 /3,5	<p><u>Proposition de résolution de cette question (ouverte)</u></p> <p>On suppose la polarisation de ondes transmises et incidentes non changée et les lois de Descartes vérifiées : d'où même pulsation et comme incidence normale propagation de toutes les ondes dans la direction de x (sens positif et sens négatif)</p> <p>On en déduit l'écriture des différents champs sous forme complexe: champs se propageant selon les x positifs : $\vec{E}_l = \underline{E}_{0i} \exp(j(\omega t - kx)) \vec{e}_y$ champs se propageant selon les x négatifs : $\vec{E}_r = \underline{E}_{0r} \exp(j(\omega t + kx)) \vec{e}_y$</p> <p>Le champ dans le conducteur est nul car le conducteur est <u>parfait</u> $\vec{E}_{tot} = \vec{E}_l + \vec{E}_r$ est purement tangentiel (car suivant \vec{e}_y). \vec{E}_{tot} est donc continu quel que soit t en $x=0$ et en $x=L$. Donc, en 0 :</p> $\vec{E}_l(0, t) + \vec{E}_r(0, t) = \vec{0}$ $\underline{E}_{0i} + \underline{E}_{0r} = 0 \text{ soit } \underline{E}_{0i} = -\underline{E}_{0r}$ <p>En L :</p> $\vec{E}_l(L, t) + \vec{E}_r(L, t) = \vec{0}$ <p>Quelques soit t : $\underline{E}_{0i} \exp(j(\omega t - kL)) + \underline{E}_{0r} \exp(j(\omega t + kL)) = 0$</p> <p>On injecte la solution de l' 'équation (1) dans (2) :</p> $\underline{E}_{0i} \exp(-jkL) - \underline{E}_{0r} \exp(jkL) = 0$ $-2 \underline{E}_{0i} j \sin(kL) = 0$	<p>0,25+0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25 (0 si pas justifié)</p> <p>0,75</p>

	<p style="text-align: center;">$k_n L = n\pi$ soit $k_n = n\pi/L$</p> <p>Seules certaines pulsations peuvent exister entre les deux conducteurs et celles-ci vérifient : $\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$ avec n entier</p> <p>Calcul du champ total :</p> $\vec{E}_{tot} = \vec{E}_i + \vec{E}_r$ $\vec{E}_{tot} = -2jE_{0i} \exp(j\omega_n t) \sin(k_n x) \vec{e}_y$ <p>Avec $\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$ et $k_n = \frac{n\pi}{L}$ avec n entier</p> $\vec{E}_{tot} = \text{Re}(\vec{E}_{tot}) = 2E_0 \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t - \frac{\pi}{2} + \varphi\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \vec{e}_y \text{ avec n entier}$	<p>0,5 (pour k_n ou f_n ou ω_n)</p> <p>0,25 (écriture complexe)</p> <p>0,5 (pour le passage en réel, ok si ω_n et k_n pas explicités dns l'expression)</p>
<p>Q3 /2,5</p>	<p>Seules les ondes EM de pulsations $\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$ avec n entier peuvent exister entre les deux conducteurs. (Mettre le point de résolution de la continuité en $x=L$ si traitée à cette question)</p> <p>On cherche les valeurs de n possibles telles que : $2 \times 10^9 \text{ rad.s}^{-1} < \omega < 3 \times 10^9 \text{ rad.s}^{-1}$ Soit $\frac{L\omega_{min}}{\pi c} < n < \frac{L\omega_{max}}{\pi c}$ soit $2,12 < n < 3,18$ La seule valeur possible entière de n est donc n=3 donc la seule pulsation possible est :</p> $\omega_3 = \frac{3\pi c}{L} = 2,83 \times 10^9 \text{ rad.s}^{-1}$ <p>Seule le mode n=3 sera présent : $\vec{E}_{tot} = 2E_0 \sin\left(\frac{3\pi c}{L}t\right) \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) \vec{e}_y$ L'allure de l'amplitude du champ électrique est alors la suivante :</p> <div style="text-align: center;"> <p>Mode 3 : amplitude du champ électrique</p> </div>	<p>0,75 (0 si pas justifié)</p> <p>0,5 (AN)</p> <p>0,25</p> <p>1 (mettre aussi les points si allure de l'enveloppe tracée) (Enlever 0,25 par erreur ou manque)</p>

Exercice 2 : Contrôle non destructif aux ultrasons		12,5 Bonus : 2
BONUS (+0.5)	<p>La fonction d'onde étant solution de l'équation de d'Alembert doit dépendre de la variable $t - x/V$, donc si on remplace t par $t - x/V$ dans $p_0(t)$ on trouve</p> $p_i(x, t) = P_0 e^{-\left[\frac{(t-x/V_{gel})^2}{2 a^2}\right]}$ <p>Et $p_i(x, t) = 0$ pour $t - \frac{x}{V} > 2a$ et $t - \frac{x}{V} < -2a$</p>	+0.25 +0,25
Q1 1	<p>Etendue spatiale de l'impulsion :</p> $D = 4aV_{gel}$ <p>Le max. de l'impulsion arrive à l'interface après un temps t_0</p> $t_0 = e/V_{gel}$ <p>A.N. $D = 0.03 \text{ mm}$ $t_0 = 33 \text{ ns}$</p>	0.25 0.25 A.N. 0.25+0.25
Q2 2.5	<p>La relation de continuité de la surpression et de la vitesse en $x = 0$ imposent</p> $p_i(0, t) + p_r(0, t) = p_t(0, t)$ $v_i(0, t) + v_r(0, t) = v_t(0, t)$ <p>En utilisant</p> $v_i = p_i/Z_{gel}$ $v_r = -p_r/Z_{gel}$ $v_t = p_t/Z_{gel}$ <p>on obtient, avec $p_r(0, t) = r p_i(0, t)$ et $p_t(0, t) = t p_i(0, t)$,</p> $1 + r = t$ $\frac{1}{Z_{gel}} - \frac{r}{Z_{gel}} = \frac{t}{Z_{alu}}$ <p>donc</p> $r = \frac{Z_{alu} - Z_{gel}}{Z_{alu} + Z_{gel}}$ $t = \frac{2Z_{alu}}{Z_{alu} + Z_{gel}}$ <p>A.N. $r = 0.84$ $t = 1.84$</p>	0.25 0.25 0.5 (0 si pas de signe – pour v_r) 0.5 (0 pour toute erreur) 0.5 (0 pour toute erreur) A.N. 0.25+0.25
Q3 1	<p>Ici on considère une seule impulsion finie dans l'espace et le temps et pas une onde entretenue. L'énoncé considère par ailleurs qu'il n'y pas de réflexion coté gel, et que l'étendue spatiale de l'onde est inférieure à l'épaisseur du gel et de l'aluminium. Donc au niveau des interfaces il ne peut y avoir que superposition de l'onde incidente et des ondes réfléchié et transmise issue directement de cette onde (pas</p>	1 (pour toute explication convaincante faisant intervenir ces deux arguments)

	de superposition avec des ondes déjà réfléchies sur une autre interface).	
Q4	$t_1 = \frac{e}{V_{gel}} + 2a = 43\text{ns}$	0.25+0.25 1,5 (enlever 0,25 par erreur sur positions, ou différence de largeurs ou différence de hauteurs des pics mal figurée, ou valeurs manquantes) (compter juste si pic démarre à 0)
Q5		1,5 (enlever 0,25 par erreur sur position, largeurs ou hauteur du pic, moitié des points si p_i et p_r non additionnés)
Q6	<p>En considérant que l'aluminium se comporte comme un milieu semi-infini, par un calcul similaire à celui de la question 2 on trouve</p> $r' = \frac{Z_{air} - Z_{alu}}{Z_{air} + Z_{alu}}$ $t' = \frac{2Z_{air}}{Z_{air} + Z_{alu}}$ <p>A.N. $r' \approx -1$ $t' \approx 0$</p> <p>On voit que t' est très faible, donc on peut considérer que l'onde est totalement réfléchi à l'interface aluminium-air.</p>	0.25 0.25 A.N : 0.25+0,25 0.5 1,5 (0.75 allure +0.5 ordonnées en L + 0.25 abscisses min/max) (mettre 0,5 si tracé avec r positif suite calcul)

<p>Q7</p> <p>2</p>	<p>pic 1 : réflexion interface gel-aluminium, pic2 : réflexion sur la fissure dans la plaque pic 3 : réflexion sur l'interface aluminium-air.</p> <p>Pour trouver l'épaisseur L de la plaque d'aluminium on considère que le temps $t_3 = 1.6 \mu s$ correspondant au troisième pic est égal au temps mis par l'impulsion pour se propager de l'émetteur jusqu'à l'interface aluminium-air et pour revenir au capteur, donc</p> $t_3 = 2\left(\frac{e}{V_{gel}} + \frac{L}{V_{Al}}\right)$ <p>d'où</p> $L = \frac{V_{Al}}{2}\left(t_3 - 2\frac{e}{V_{gel}}\right)$ <p>A.N. $L = 4,9 \text{ mm}$</p> <p>Même raisonnement pour déterminer la profondeur de la fissure l_{fis}, avec $t_2 = 0.5 \mu s$:</p> $t_2 = 2\left(\frac{e}{V_{gel}} + \frac{l_{fis}}{V_{Al}}\right)$ $l_{fis} = \frac{V_{Al}}{2}\left(t_2 - 2\frac{e}{V_{gel}}\right)$ <p>A.N. $l_{fis} = 1,4 \text{ mm}$</p>	<p>0,5 (0 pour toute erreur)</p> <p>0.5</p> <p>0.25</p> <p>A.N. 0.25</p> <p>0.25</p> <p>A.N. 0.25</p>
<p>Q8</p> <p>Bonus : 1,5</p>	<p>Pour observer le premier pic d'intensité $I_1 = 10 \text{ W/cm}^2$ l'onde a été réfléchiée une fois à l'interface gel/aluminium. En termes d'intensité cela implique :</p> $I_1 = R_{gel-Al} I_0$ <p>d'où</p> $I_0 = \frac{I_1}{R_{gel-Al}} = \frac{I_1}{r^2}$ <p>A.N. $I_0 = 14.2 \text{ W/cm}^2$</p> <p>Pour observer le troisième pic d'intensité I_3 l'onde a été transmise 2 fois à l'interface gel-aluminium (1 fois à l'aller et 1 fois au retour) et elle a été réfléchiée 1 fois à l'interface aluminium-air. En termes d'intensité cela implique :</p> $I_3 = T_{gel-Al}^2 R_{Al-air} I_0 = (1 - r^2)^2 r'^2 I_0$ <p>A.N. $I_3 = 1.23 \frac{W}{cm^2}$</p> <p>La valeur théorique est supérieure à la valeur mesurée car il y a surement des pertes d'énergie dans le gel ou l'aluminium</p>	<p>B : 0.25</p> <p>B : A.N. 0.25</p> <p>B : 0.25</p> <p>B : 0.25</p> <p>B : 0.25</p> <p>B : 0,25</p>