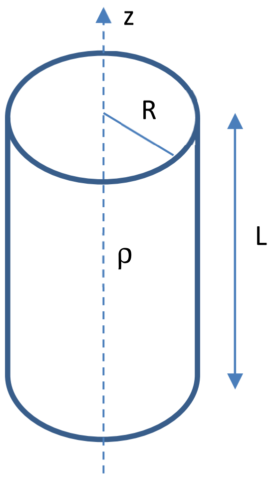
Physique : Interrogation n°1

Lundi 6 Novembre   Durée : 1h30

CORRIGE

Exercice 1 : Etude d'un champ vectoriel		**6 points**
1.1	D'après l'énoncé (invariance selon z et θ) : $\vec{F} = F_r(r)\overrightarrow{u_r} + F_\theta(r)\overrightarrow{u_\theta} + F_z(r)\overrightarrow{u_z}$ Par ailleurs : $\overrightarrow{rot}(\vec{F}) = \alpha\overrightarrow{u_z}$ On a donc : 1) $\frac{\partial F_z}{\partial r} = 0$ ➔ $F_z(r) = C_1$ 2) $\frac{1}{r}\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} = \alpha$ ➔ $rF_\theta(r) = \alpha\frac{r^2}{2} + C_2$ Or, $\vec{F}$ est nul en r=0 : ✓ C_1=0 et $F_z(r) = 0$; ✓ C_2=0 et $F_\theta(r) = \frac{\alpha r}{2}$ De plus, $div(\vec{F}) = 0$ On a donc : $\frac{1}{r}\frac{\partial(rF_r)}{\partial r} = 0$ ➔ $(rF_r) = C_3$ $\vec{F}$ est nul en r=0, donc C_3=0, d'où $F_r(r) = 0$	0,25 0,25 0,25 + 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25
1.2	$\vec{F} = \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{A(r)})$ Donc, $\frac{\partial(A_z)}{\partial r} = -F_\theta(r) = -\frac{\alpha r}{2}$ $A_z(r) = -\frac{\alpha r^2}{4} + C_4$ $\vec{A}$ n'a qu'une composante selon $\overrightarrow{u_z}$ et vaut k en r=0 donc $C_4 = k$	0,5 0,25 0,25
1.3	$\overrightarrow{rot}\vec{F} = \alpha\overrightarrow{u_z}$ est non nul, donc $\vec{F}$ ne dérive pas d'un potentiel scalaire	0,25
1.4	Dans le domaine considéré, $div(\vec{A}) = 0$, donc il est à flux conservatif.	0,25
1.5	D'après l'orientation du contour : $\Phi = \iint \vec{F}.\overrightarrow{dS}$ $= \iint \vec{F}.\overrightarrow{u_\theta}dS$ $\Phi = \int_0^d H\frac{\alpha r}{2}dr = \frac{\alpha H d^2}{4}$	0,25 0,5+0,25
1.6	$C = \int_A^B \vec{A}.\overrightarrow{dl} + \int_B^C \vec{A}.\overrightarrow{dl} + \int_C^D \vec{A}.\overrightarrow{dl} + \int_D^A \vec{A}.\overrightarrow{dl} =$ $\int_{z=0}^{z=H} A(r=0).dz + \int_{z=H}^{z=0} A(r=d).dz$ $= kH - H(-\frac{\alpha d^2}{4} + k)$ $= +\frac{\alpha H d^2}{4}$	0,5 0,25 0,25 (0/1 pour toute erreur de signe)

	Pour retrouver ce résultat, il suffit d'utiliser le théorème de Stokes : $\mathcal{C} = \iint_{ABCD} \overrightarrow{rot}\vec{A}.\overrightarrow{dS} = \iint \vec{F}.\overrightarrow{dS} = \Phi = \frac{\alpha H d^2}{4}$	0,5
EXERCICE 2 : Principe d'un capteur capacitif de niveau		**14 points + bonus : 2,25**
2.1	$Q = \pi L R^2 \rho$  + repère cylindrique avec les vecteurs bien positionnés	0,5 0,5 (uniquement avec le repère correct)
2.2	Le cylindre est considéré comme de longueur infinie, on a donc invariance <u>par translation selon z</u> On a aussi invariance <u>par rotation d'angle θ</u> Quel que soit M de l'espace, le plan (M, $\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_z}$) est plan de symétrie pour la répartition des charges et donc pour le champ $\vec{E}$ Soit : $\vec{E} = E_r(r)\overrightarrow{u_r} + E_z(r)\overrightarrow{u_z}$ Quel que soit M de l'espace, le plan (M, $\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\vartheta}$) est plan de symétrie pour la répartition des charges donc pour le champ $\vec{E}$ Donc finalement : $\vec{E} = E_r(r)\overrightarrow{u_r}$	0,25 0,25 0,25 (avec justification) 0,25 (avec justification)
2.3	Deux régions sont à distinguer : i) <u>Dans le cylindre (r <R) : $\rho \neq 0$</u> $\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, soit : $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_r) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ $rE_r = \frac{\rho r^2}{2\epsilon_0} + k_1$, avec k_1 cste Mais, dans le cylindre, $\vec{E} = \vec{0}$ pour $r = 0$ (symétrie de la distribution de charges) On a donc : $k_1 = 0$ Ce qui donne finalement : $E_r = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}$ pour $r < R$ ii) <u>En dehors du cylindre (r>R) : $\rho = 0$</u> $\text{div}(\vec{E}) = 0$, soit : $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_r) = 0$ $rE_r = k_2$, avec k_2 cste Pour trouver k_2, on utilise la continuité du champ électrique à l'interface $r = R$ car la distribution de courant est volumique et n'entraîne aucune discontinuité du champ électrique au passage de l'interface. On peut donc écrire que : $\vec{E}(r = R^+) = \vec{E}(r = R^-)$ $\frac{k_2}{R} = \frac{\rho R}{2\epsilon_0} \Leftrightarrow k_2 = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}$	 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 (explication) 0,25 0,25

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
Finalement :

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho r}{2\epsilon_0}\vec{u_r}, & (r < R) \\ \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}\vec{u_r}, & (r > R) \end{cases}$$

Représentation :

- entre r = 0 et r = R : évolution linéaire du champ où celui-ci augmente de 0 à $\frac{\rho R}{2\epsilon_0}$
- pour r = R : décroissance du champ en 1/r à partir de sa valeur maximale en r = R
- pas de discontinuité du champ
</td>
<td>
(non noté)

0,5
(0 pour toute erreur)
</td>
</tr>
<tr>
<td>2.4</td>
<td>
On considère que la charge est la même dans un cylindre de densité volumique ρ et dans un fil de densité linéique λ : $Q = \rho \cdot \pi R^2 \cdot L = \lambda \cdot L$

D'où : $\rho = \frac{\lambda}{\pi R^2}$

Finalement : $\vec{E}_{r>R} = \frac{R^2}{2\epsilon_0 r}\left(\frac{\lambda}{\pi R^2}\right)\vec{u_r}$

On obtient alors le résultat donné dans le sujet : $\vec{E}_{r>R} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\vec{u_r}$
</td>
<td>
0,5

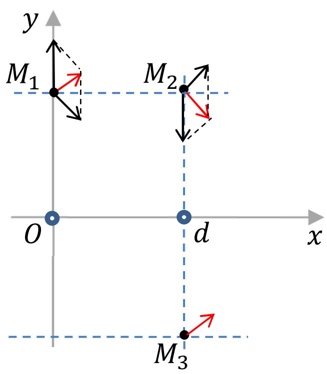
0,5
</td>
</tr>
<tr>
<td>2.5</td>
<td>

- **Symétries :**
  - Le plan $(x0z)$ contenant l'axe des deux fils est un plan de symétrie de la distribution des charges
  - Tout plan parallèle au plan (xOy) (cylindres infinis dans la direction de l'axe Oz) est aussi un plan de symétrie de la distribution des charges……………………………
    - Le champ E est contenu dans ces plans
  - Le plan $x = d/2$ est un plan d'antisymétrie de la distribution des charges…………..
    - Le champ E est perpendiculaire à ce plan
- **Invariances :**
  - La distribution des charges est invariante en translation par rapport à z

<u>Conclusion :</u>

- Pour les points contenus dans le plan (xOz) d'équation y = 0, ceux-ci appartiennent <u>à deux plans de symétrie orthogonaux dont la direction commune est celle de l'axe Ox et le champ doit être contenu dans ces deux plans</u> :
  $\vec{E} = E_x(x)\vec{u_x}$
- Pour les points contenus dans le plan (xOy), le champ électrique est contenu dans ce plan :
  $\vec{E} = E_x(x,y)\vec{u_x} + E_y(x,y)\vec{u_x}$
  On notera que pour les points du plan tels que x = d/2, on a : $\vec{E} = E_x(x = d/2, y)\vec{u_x}$ car le champ E est perpendiculaire aux plans d'antisymétrie

<u>Tracé des champs aux points M1, M2 et M3 :</u>



- Exiger le tracé du champ résultant à partir du champ produit par chaque fil (au moins) pour un point (par exemple M_1) (ne pas pénaliser si la norme des champs produit par chaque fil n'est pas complètement réaliste)
- Les champs électriques aux points M_2 et M_3 peuvent être obtenus en utilisant les plans de symétrie/antisymétrie (ou à partir des champs produits par chaque fil)
  - ✓ M_1 et M_2 sont de part et d'autre d'un plan d'antisymétrie ➔ les champs en ces points sont antisymétriques
  - ✓ M_2 et M_3 sont de part et d'autre d'un plan de symétrie ➔ les champs en ces points sont symétriques
</td>
<td>
0,25

0,25

0,25
0,25

0,25

0,25

0,25

0,25

Bonus : 0,25

1

0,5
(tracé correct en M_2)
0,5
(tracé correct en M3)
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>Remarque : si le champ en M_1 n'est pas correct mais les symétries/antisymétries sont respectées en M_2 et M_3, mettre 1/2</td><td></td></tr>
<tr><td>2.6</td><td>Le principe de superposition indique que le champ électrique total est la somme des champs électriques de chaque fil :

$$\vec{E} = \vec{E}_1(x) + \vec{E}_2(d-x)$$

($\vec{E}_2$ a un centre de repère décalé à $d - x$)

On utilise l'expression du champ E en dehors du fil en considérant que $\vec{u}_r = \vec{u}_x$ sur l'axe reliant les deux fils et que la variable r devient x. Nous avons alors pour $\delta < x < d - \delta$:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 (d-x)}\overrightarrow{u_x}$$

Soit :

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{d}{x(d-x)}\right)\overrightarrow{u_x}$$</td><td>0,5

1
(0,5 si erreur de signe)</td></tr>
<tr><td>2.7</td><td>On fait circuler le champ entre les deux fils (sachant que le champ électrique est nul dans les fils) :

$$\int_{\delta}^{d-\delta} \vec{E}\,.\overrightarrow{dl} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\int_{\delta}^{d-\delta}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{d-x}\right)dx = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\left(\ln\left(\frac{d-\delta}{\delta}\right) - \ln\left(\frac{\delta}{d-\delta}\right)\right) = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{d-\delta}{\delta}\right)$$

De plus,

$$\int_{\delta}^{d-\delta} \vec{E}\,.\overrightarrow{dl} = \int_{V1}^{V2} -\overrightarrow{grad}\,V.\overrightarrow{dl} = \int_{V1}^{V2} -d\,V = V_1 - V_2 = U$$

D'où : $U = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{d-\delta}{\delta}\right)$

On en déduit : $a = 1/\pi$; $b = d - \delta$ et $c = \delta$</td><td>0,5 (calcul bien posé même avec expression de E fausse) + 1 (résultat)

0,5</td></tr>
<tr><td>2.8</td><td>$dQ = \lambda dz = dC \times U$

On a donc : $dC = \frac{\epsilon_0}{a\ln\left(\frac{b}{c}\right)}dz$</td><td>0,25

0,25</td></tr>
<tr><td>2.9</td><td>En présence du liquide, tout se passe comme si l'on avait deux condensateurs en parallèle : <u>le premier de hauteur h, immergé dans le liquide de permittivité diélectrique ε et le deuxième de hauteur L-h dont la permittivité est ε_0.</u> Les deux condensateurs sont en parallèle <u>car ils sont soumis chacun à la même différence de potentiel U.</u>

On a alors :

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

$$C_{eq} = \frac{\epsilon_0\epsilon_r}{a\ln\left(\frac{b}{c}\right)}h + \frac{\epsilon_0}{a\ln\left(\frac{b}{c}\right)}(L-h) = \frac{\epsilon_0 L}{a\ln\left(\frac{b}{c}\right)}\left(1 + (\epsilon_r - 1)\frac{h}{L}\right)$$

$$C_{eq} = C_0(1+\alpha h)\ avec\ C_0 = \frac{\epsilon_0 L}{a\ln\left(\frac{b}{c}\right)}\ et\ \alpha = \frac{(\epsilon_r - 1)}{L}$$</td><td>0,25
0,25

Bonus : 0,5

0,25 (C_1) + 0,25 (C_2)

0,25 (C_0)+ 0,25(α)</td></tr>
<tr><td>2.10</td><td>Pour faire une détection de niveau de liquide, il faut pouvoir mesurer la variation de capacité induite par le liquide de hauteur h.
Une possibilité est d'introduire le dispositif dans un circuit résonnant (par exemple, un circuit RLC série) et de mesurer la variation de fréquence de résonance induite par l'immersion dans le liquide ➔ on peut alors déterminer C_{eq} et en déduire h.
Une autre possibilité est d'introduire le dispositif dans un circuit RC et de mesurer la variation de la constante de temps $\tau = RC$ induite par la présence du liquide
Accepter toute autre proposition qui pourrait fonctionner</td><td>Bonus : 0,5 (au maximum)</td></tr>
</table>