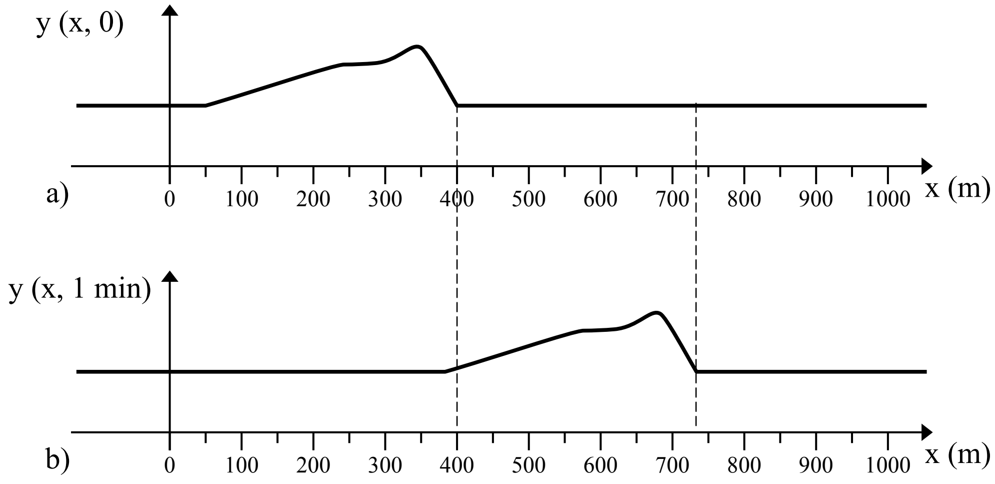
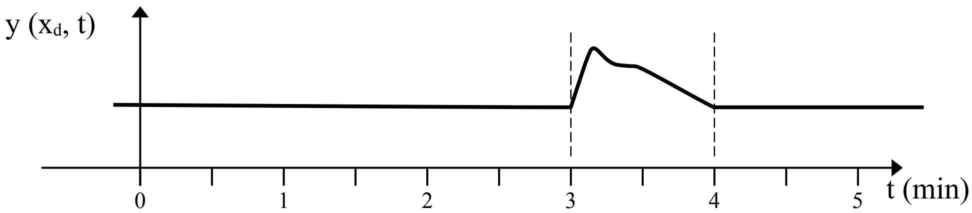
Physique 2023-24 S4 - IE1 lundi 18 Mars - 1h30

NOM : Prénom : Note/20 :

Exercice 1 : Le mascaret de Saint Pardon / le paradis des surfeurs amateurs (5 pts)

	Points
1)  $c = 20\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1} = 333,33\ \mathrm{m}\cdot\ \mathrm{min}^{-1} = 5,55\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ À $t = 1$ min, l'onde a progressé de $c \times t = 333,33$ m donc le front d'onde qui se trouvait auparavant à 400 m est arrivé à $733,33$ m	figure **1** explications **0,5**
2) L'onde doit encore parcourir une distance $x_s - 400\ \mathrm{m} = 1600\ \mathrm{m}$ Donc le surfeur recevra la vague à l'instant $1600/333,33 = 4,8\ \mathrm{min} = 4\ \mathrm{min}\ 48\ \mathrm{s}$	ssi exact **0,5**
3) Le détecteur commence à enregistrer une variation de hauteur à $t = (x_d - 400\ \mathrm{m})/c = 3\ \mathrm{min}$ **(0 pour toute erreur)** La longueur de l'onde est de 350 m donc les variations mesurées par le détecteur durent $350/333,33 = 1,05\ \mathrm{min} \approx 1\ \mathrm{min}$ **(0 pour toute erreur)** La hauteur maximale intervient quand l'onde a parcouru environ 50 m ce qui correspond à $50/5{,}55\ \mathrm{s} = 9\ \mathrm{s}$ **(ou justification d'un autre point de la courbe)**  N.B. : 0 si allure fausse ou ambiguë ou si échelle fausse ou inadaptée	**0,5** **0,5** **0,5** **1**
4) Affaiblissement progressif de l'amplitude de l'onde car dissipation d'énergie	**0,5**

Exercice 2 : Propagation des ondes électromagnétiques dans l'eau salée (15 pts + 0,5 pts)

	Points
1) Les quatre équations de Maxwell sont ici : $$\begin{cases} \mathrm{div}\left(\epsilon\vec{E}\right) = 0 & \text{(Maxwell-Gauss)} \\ \mathrm{div}\vec{B} = 0 & \text{(Maxwell-Thomson ou Maxwell-flux)} \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} & \text{(Maxwell-Faraday)} \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\dfrac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{j} + \epsilon\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} & \text{(Maxwell-Ampère)} \end{cases}$$	donné
équation relative à $\vec{E}$	
On part de M-F : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E}\right) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = -\dfrac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B}$	**0,5**
On utilise la propriété : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E}\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\vec{E}\right) - \vec{\Delta}\vec{E} = -\vec{\Delta}\vec{E}$	**0,5**
D'où : $\vec{\Delta}\vec{E} = \dfrac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\vec{j} + \mu_0\epsilon\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$	
Finalement, comme $\vec{j} = \gamma\vec{E}$:	**0,5**
$\boxed{\vec{\Delta}\vec{E} = \mu_0\gamma\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu_0\epsilon\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}}$	**0,5**
2) $\underline{\vec{E}}(\vec{r},t) = E_0 e^{j(\omega t - \underline{k}z)}\vec{u}_x$ **(accepter k réel)** Autre écriture possible $\underline{\vec{E}}(\vec{r},t) = E_0 e^{-k''z} e^{j(\omega t - k'z)}\vec{u}_x$	**0,5**
3) $\Rightarrow \dfrac{\partial\underline{\vec{E}}(z,t)}{\partial t} = j\omega\underline{\vec{E}}(z,t) \Rightarrow \dfrac{\partial^2\underline{\vec{E}}(z,t)}{\partial t^2} = -\omega^2\underline{\vec{E}}(z,t)$	**0,5**
Propriété : $\Delta\underline{\vec{E}}(z,t) = -k^2\underline{\vec{E}}(z,t)$	**1**
$-k^2\cancel{\underline{\vec{E}}(z,t)} = j\mu_0\gamma\omega\cancel{\underline{\vec{E}}(z,t)} - \mu_0\epsilon\omega^2\cancel{\underline{\vec{E}}(z,t)}$	
Soit : $\boxed{k^2 + \mu_0\omega\left(-\epsilon\omega + j\gamma\right) = 0}$	donné
4) Si $f = 1$ MHz alors $\epsilon\omega = \dfrac{9}{4\pi} \times 10^{-9} \times 2\pi \times 10^6 = 4,5 \times 10^{-3}$S.I. **(A.N. juste)** alors que $\gamma = 4\ \mathrm{S\cdot m^{-1}}$	**0,5**
Donc $\epsilon\omega \ll \gamma$ et $\boxed{k^2 + j\mu_0\gamma\omega \approx 0}$	**0,5**
5) $\underline{k}^2 = -j\mu_0\gamma\omega = e^{-j\frac{\pi}{2}}\mu_0\gamma\omega = ...$ où bien partir de l'expression donnée pour $\underline{\mathrm{k}}$, mettre au carré et identifier... $\boxed{\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0\gamma\omega}}}$ **(0 pour toute erreur dans demo ou résultat)**	**1**
6) $\underline{\vec{E}}(z,t) = E_0 e^{j\left(\omega t - \frac{1-j}{\delta}z\right)}\vec{u}_x = E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{j\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)}\vec{u}_x$ **(justif. signe de k)**	**0,5**
$\vec{E}(z,t) = \mathrm{Re}\left(\underline{\vec{E}}(z,t)\right) \Rightarrow \boxed{\vec{E}(z,t) = E_0 e^{-\frac{z}{\delta}}\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\vec{u}_x}$ **(0 pour toute erreur)**	**1**
7) $V = \dfrac{\omega}{\mathrm{Re}\left(\underline{\vec{k}}\right)} = \omega\delta = \omega\sqrt{\dfrac{2}{\mu_0\gamma\omega}} = \sqrt{\dfrac{2\omega}{\mu_0\gamma}}$	**0,5**

	Points
8) On ne peut pas utiliser $\vec{B} = \dfrac{\vec{n} \wedge \vec{E}}{c}$ car l'onde est amortie (bonus)	**+0,5**
On part donc de M-F : $\overrightarrow{\text{rot}}\underline{\vec{E}} = -\dfrac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} = -j\omega \underline{\vec{B}}$	**0,5**
Avec $\overrightarrow{\text{rot}}\underline{\vec{E}} = -j\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}} = -j\omega\underline{\vec{B}} \Rightarrow \underline{\vec{B}} = \dfrac{1}{\omega}\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}} \Leftrightarrow \boxed{\underline{\vec{B}} = \dfrac{1-j}{\delta\omega} E_0 \mathrm{e}^{j\left(\omega t - \frac{1-j}{\delta} z\right)} \vec{u}_y}$	**1**
$\boxed{\vec{B} = \mathrm{Re}\,(\underline{\vec{B}}) = \dfrac{E_0}{\delta\omega}\mathrm{e}^{\left(-\frac{z}{\delta}\right)} \left(\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) + \sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right) \vec{u}_y}$	**1**
(ou encore : $\vec{B} = \frac{\sqrt{2}E_0}{\delta\omega}\mathrm{e}^{\left(-\frac{z}{\delta}\right)} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right) \vec{u}_y$)	
La démo peut aussi se faire avec les expressions réelles (avec utilisation du rotationnel en réel, puis primitive etc...). **Cette démo est donc sur 2.5 points dont 0,5 pour la formule de départ, et dont 1 point pour le résultat final sans erreur (avec 0/1 pour toute erreur dans la formule réelle finale)**	
Vecteur de Poynting $\vec{R} = \vec{E} \wedge \dfrac{\vec{B}}{\mu_0}$ associé à l'onde incidente : $$\vec{R} = \begin{pmatrix} E_0 \mathrm{e}^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{E_0}{\delta\omega}\mathrm{e}^{\left(-\frac{z}{\delta}\right)} \left(\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) + \sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$ $$= \frac{E_0^2}{\mu_0 \delta\omega}\mathrm{e}^{\left(-\frac{2z}{\delta}\right)} \left(\cos^2\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) + \sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right) \vec{u}_z$$ **(0.5/1 si résultat faux mais calcul cohérent)**	**1**
La norme de $\vec{R}$ correspond à la puissance **instantanée** $p(t)$ rayonnée par unité de surface (perpendiculaire à la direction de propagation) donc il faut calculer la puissance moyenne. $$P = < p(t) > = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} p(t)\mathrm{d}t = \frac{E_0^2}{2\mu_0\delta\omega}\mathrm{e}^{\left(-\frac{2z}{\delta}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\gamma}{2\mu_0\omega}} E_0^2 \mathrm{e}^{\left(-\frac{2z}{\delta}\right)}$$	**0,5**
En partant de $z = 0$, la puissance par unité de surface est divisée par 10 signifie : $\mathrm{e}^{\left(-\frac{2D}{\delta}\right)} = 1/10 \Leftrightarrow D = \dfrac{\delta \ln(10)}{2} \approx 1,15\delta$	**1**
9) A.N. avec $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ T.m.A^{-1}, $\gamma = 4$ S.m^{-1} :	

f (Hz)	δ (m)	V (m.s^{-1})	D (m)
1 Hz	251,6	$1,58 \times 10^3$	289,7
1 kHz	7,96	$5,00 \times 10^4$	9,16
1 MHz	0,25	$1,58 \times 10^6$	0,29

1,5

Donc il faudrait utiliser des TBF pour communiquer sous l'eau à des centaines de mètres — **0,5**