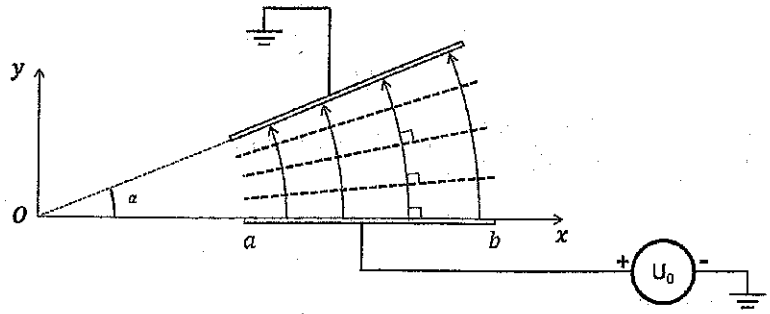
Exercice 1 : Modélisation de la charge d'un proton – 17 points (+0,5 bonus)		
Éléments de correction, attendus et barème		
1. a) $e = 1.6 10^{-19}\ C$ b) $\vec{E}_c$ croît continument quand r diminue et tend vers $+\infty$ quand $r \to 0$, alors que le modèle du proton passe par un maximum en $r \approx 0,1\ fm$ et s'annule en $r = 0$. A partir de $r \approx 0,8\ fm$, les deux modèles sont quasiment confondus. Avantages du modèle du proton : le champ électrique est défini dans tout l'espace (y compris en $r = 0$), et ne diverge pas quand $r \to 0$ Tout plan contenant O est un plan de symétrie de la répartition de charges, donc $\vec{E}(O)$ appartient à tous ces plans $\Longrightarrow \vec{E}(O) = \vec{0}$. c) $\frac{\lvert E-E_c \rvert}{E} = 0,01$ ou $\frac{E}{E_c} = 0,99 \Longleftrightarrow \exp(-\frac{b}{r}) = 0,99 \Longrightarrow \frac{b}{r} = \ln(\frac{1}{0,99}) \approx 0,01$ Application numérique : $r = 16\ fm$	0,5 : valeur e 1 : 4 × 0,25 (idées soulignées) 0,5 : 2 avantages 1 : valeur $E(O)$ 1 : établissement rapport (0,5) et application numérique (0,5)	/4
2. On utilise l'équation de Maxwell-Gauss : $\mathrm{div}(\varepsilon_0 \vec{E}) = \rho(r)$ Avec l'expression de $\vec{E}$, la divergence se simplifie et donne : $\varepsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 E_r(r))}{\partial r} = \rho(r)$ Après la dérivation par rapport à r, on obtient : $\rho(r) = \frac{\varepsilon_0 A b}{r^4} \exp(-\frac{b}{r})$	0,5 : Maxwell-Gauss 1 : expression divergence 1 : $\rho(r)$	/2,5
3. $Q = \int_{r=0}^{+\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{\varepsilon_0 A b}{r^4} \exp(-\frac{b}{r})\, r^2 \sin(\theta) \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi$	1 : bornes (-0.5 par erreur) 0,5 : dτ sphérique	/1,5
4. Les variables étant séparées, on a : $Q = \varepsilon_0 A b \int_{r=0}^{+\infty} \frac{\exp(-\frac{b}{r})}{r^2} \mathrm{d}r \times \int_{\theta=0}^{\pi} \sin(\theta) \mathrm{d}\theta \times \int_{\phi=0}^{2\pi} \mathrm{d}\phi$ $\Longrightarrow Q = \varepsilon_0 A b \times 4\pi \times \int_{r=0}^{+\infty} \frac{\exp(-\frac{b}{r})}{r^2} \mathrm{d}r$ La primitive de l'intégrale sur r est donnée : $\int_{r=0}^{+\infty} \frac{\exp(-\frac{b}{r})}{r^2} \mathrm{d}r = [\frac{1}{b} \exp(-\frac{b}{r})]_0^{+\infty} = \frac{1}{b}$ Donc : $Q = 4\pi\varepsilon_0 A b \times \frac{1}{b} = 4\pi\varepsilon_0 A = 4\pi\varepsilon_0 \times \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} = e$	0,5 : intégrations selon θ et ϕ 0,5 : intégration selon r 0,5 : $Q = 4\pi\varepsilon_0 A$ 0,5 : $Q = e$	/2

5. $$\vec{E}(r) = -\overrightarrow{\text{grad}}(V(r)) \Longrightarrow E_r(r) = -\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}$$ $$\Longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r} = -\frac{A}{r^2}\exp(-\frac{b}{r})$$ Par intégration selon r (primitive donnée) : $$V(r) = -\frac{A}{b}\exp(-\frac{b}{r}) + K$$ Condition limite : $$\lim_{r\to+\infty} V(r) = 0 \Longrightarrow -\frac{A}{b}\lim_{r\to+\infty}\left(\exp(-\frac{b}{r})\right) + K = 0$$ $$\text{Or : } \lim_{r\to+\infty}\left(\exp(-\frac{b}{r})\right) = 1 \Longrightarrow K = \frac{A}{b}$$ Finalement : $$V(r) = \frac{A}{b}\left(1-\exp(-\frac{b}{r})\right)$$	0,5 : expression $\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}$ 0,5 : expression $V(r)$ (0 si oubli de la constante) 0,5 : expression constante d'intégration 1 : expression finale $V(r)$	/2,5
6. Si $\exp(-\frac{b}{r}) \approx 1-\frac{b}{r}$, alors : $$V(r) \approx \frac{A}{r} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}$$ Bonus : on retrouve alors le potentiel Coulombien autour d'une charge ponctuelle e.	0,5 : expression $V(r)$ (fonction de A ou e) +0,5 : remarque	/0,5 +0,5 bonus
7. Densité volumique d'énergie électrostatique : $$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{A^2}{r^4}\exp(-\frac{2b}{r})$$ Énergie électrostatique totale : $$W_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 A^2\int_{r=0}^{+\infty}\frac{\exp(-\frac{2b}{r})}{r^2}\mathrm{d}r \times \int_{\theta=0}^{\pi}\sin(\theta)\mathrm{d}\theta \times \int_{\phi=0}^{2\pi}\mathrm{d}\phi$$ L'intégrale selon r se calcule grâce à la primitive donnée à la question 4, avec $2b$ à la place de b : $$\int_{r=0}^{+\infty}\frac{\exp(-\frac{2b}{r})}{r^2}\mathrm{d}r = \frac{1}{2b}$$ D'où : $$W_e = \frac{\pi\varepsilon_0 A^2}{b}$$ et : $$W_e = \frac{e^2}{16\pi\varepsilon_0 b}$$	0,5 : w_e développée 1 : intégrale correctement posée 1 : intégration selon r 1 : résultat en fonction de A 0,5 : résultat en fonction de e	/4

<table>
<tr><td colspan="3">Exercice 2 : Condensateur diédrique – 17 points</td></tr>
<tr><td>8. Schéma :


Justification : les lignes de $\vec{E}$ sont perpendiculaires aux surfaces équipotentielles qui sont des plans (qui contiennent (Oz)), et en particulier aux armatures. Elles sont orientées dans le sens des potentiels décroissants.
$\|\vec{E}\|$ est maximale là où les surfaces équipotentielles sont les plus rapprochées, c'est-à-dire du côté de $x = a$ (ou du côté gauche du condensateur).</td><td>1 : équipotentielles
1 : lignes de champ crédibles (-0,5 si non orientées)

1 : justification (0,5 perpendiculaires et 0,5 orientation)

1 : zone max $\|\vec{E}\|$</td><td>/4</td></tr>
<tr><td>9. On combine l'équation de Maxwell-Gauss et $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$, ce qui donne :
$$\text{div}(-\varepsilon_0\,\overrightarrow{\text{grad}}(V)) = \rho$$
$$\Longleftrightarrow\ -\varepsilon_0 \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(V)) = \rho \text{ car div est linéaire}$$
$$\Longleftrightarrow\ \Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \text{ par définition du Laplacien}$$</td><td>1 : démonstration convaincante</td><td>/1</td></tr>
<tr><td>10. Dans l'espace inter-armatures, $\rho = 0$ et en coordonnées cylindriques, puisque V ne dépend que de θ, on a :
$$\Delta V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V(\theta)}{\partial\theta^2} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial^2 V(\theta)}{\partial\theta^2} = 0$$
1$^{\text{ère}}$ intégration selon θ :
$$\frac{\partial V(\theta)}{\partial\theta} = K_1,\ K_1 \in \mathbb{R}$$
2$^{\text{ème}}$ intégration selon θ :
$$V(\theta) = K_1\theta + K_2,\ K_2 \in \mathbb{R}$$
Conditions aux limites sur la figure 2 : $V(\theta = 0) = U_0$ et $V(\theta = \alpha) = 0$
D'où :
$$V(0) = K_2 = U_0$$
$$\text{Et : } V(\alpha) = K_1\alpha + U_0 = 0 \Longleftrightarrow K_1 = -\frac{U_0}{\alpha}$$
Finalement :
$$V(\theta) = U_0(1 - \frac{\theta}{\alpha})$$</td><td>0,5 : expression ΔV en cylindriques
0,5 : $\rho = 0$

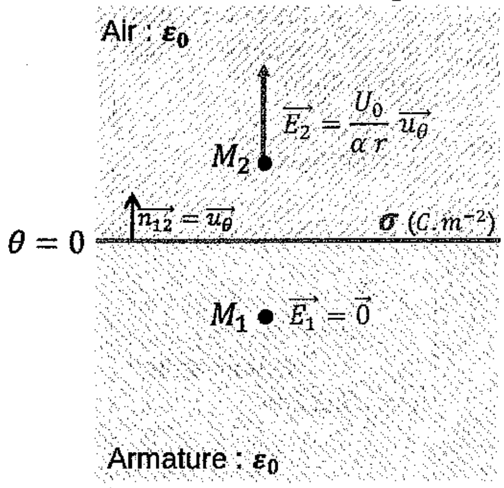
0,5 : 1$^{\text{ère}}$ intégration (0 si oubli constante)

1 : 2$^{\text{ème}}$ intégration (0 si oubli constante)

0,5 : écriture des conditions aux limites

1 : constantes K_1 et K_2 (0,5 chacune)

Expression $V(\theta)$ donnée</td><td>/4</td></tr>
</table>

11. $$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) = -\frac{1}{r}\frac{\partial V(\theta)}{\partial\theta}\vec{u}_\theta$$ $$= -\frac{1}{r}\times\frac{-U_0}{\alpha}\vec{u}_\theta = \frac{U_0}{r\alpha}\vec{u}_\theta$$ Cette dépendance en $\frac{1}{r}$ est cohérente avec la proposition faite à la question 8 : la norme de $\vec{E}$ est décroît quand r croît, donc elle est maximale du côté gauche du condensateur.	0,5 : gradient en cylindriques (0 sans vecteur) 1 : expression de $\vec{E}$ 0,5 : lien avec question 8	/2
12. Schéma de l'interface doit comporter : normale, $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$, σ, $\theta = 0$.  On utilise la relation de passage de la composante normale de $\vec{E}$ (il n'y a pas de composante tangentielle) : $$\vec{n}_{12}\cdot\left(\varepsilon_0\vec{E}_2(\theta=0) - \varepsilon_0\vec{E}_1(\theta=0)\right) = \sigma(r)$$ Dans l'armature conductrice, $\vec{E}_1 = \vec{0}$, d'où : $$\vec{u}_\theta\cdot\varepsilon_0\frac{U_0}{\alpha r}\vec{u}_\theta = \sigma(r)$$ $$\Longleftrightarrow \sigma(r) = \frac{U_0\varepsilon_0}{\alpha r}$$	1,5 : schéma complet (-0,5 par oubli) 0,5 : relation de passage $E_\perp$ 0,5 : champ nul dans le conducteur inférieur 0,5 : exploitation correcte de la relation de passage (résultat donné)	/3
13. Par définition : $$Q = \int_{r=a}^{b}\int_{z=-h}^{0}\sigma(r)\mathrm{d}r\mathrm{d}z$$ Variables séparées $\Longrightarrow Q = \frac{U_0\varepsilon_0}{\alpha}\int_{r=a}^{b}\frac{\mathrm{d}r}{r}\times\int_{z=-h}^{0}\mathrm{d}z$ $$\Longrightarrow Q = \frac{U_0\varepsilon_0 h}{\alpha}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$	0,5 : dS sur armature 0,5 : bornes (0 si bornes z incohérentes) 0,5 : intégration selon r 0,5 : expression finale de Q	/2
14. On a : $$Q = CU_0 \Longleftrightarrow C = \frac{\varepsilon_0 h}{\alpha}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$	0,5 : $Q = CU_0$ 0,5 : expression de C	/1