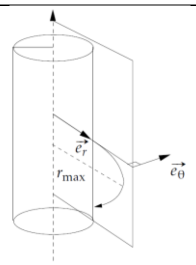
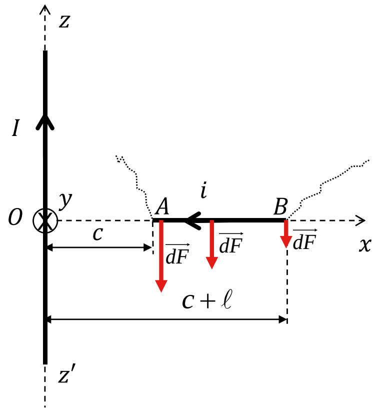
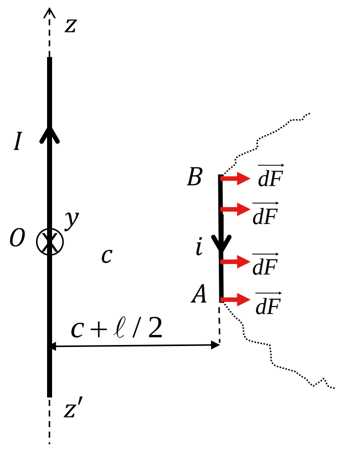
Physique : Interrogation n°2

Lundi 18 décembre 2023 — Durée : 1h30

Exercice 1		**11pts**
1	Symétries : - tout plan contenant l'axe z est plan de symétrie de la distribution des courants - $\vec{B}$ est perpendiculaire à ces plans donc $\vec{B} = B\,\overrightarrow{u_\theta}$ - et $B(0)=0$ Invariances : par rotation et translation suivant z donc $B = B(r)$ $\vec{B} = B(r)\,\overrightarrow{u_\theta}$ Pour $r < R$: $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{B_{\text{int}}}\right) = \mu\,\vec{j}$ $\frac{1}{r}\frac{\partial\left(rB_{\text{int}}\right)}{\partial r} = \mu\, j_0 \frac{r}{R}$ $B_{\text{int}} = \mu\, j_0 \frac{r^2}{3R} + \frac{A}{r}$ comme $B(0)=0$ alors $A=0$ $\overrightarrow{B_{\text{int}}} = \frac{\mu\, j_0 r^2}{3R}\overrightarrow{u_\theta}$ Pour $r > R$: $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{B_{ext}}\right) = \vec{0}$ $\overrightarrow{B_{ext}} = \frac{B}{r}\overrightarrow{u_\theta}$ Relation de passage en $r = R$ sans courant surfacique : $\frac{B_{ext}(R)}{\mu_0} - \frac{B_{\text{int}}(R)}{\mu} = 0$ $\frac{B}{\mu_0 R} - \frac{\mu\, j_0 R^2}{\mu 3R} = 0$ soit $B = \frac{\mu_0\, j_0 R^2}{3}$ $\overrightarrow{B_{ext}} = \frac{\mu_0 j_0 R^2}{3r}\overrightarrow{u_\theta}$	
2	$I = \iint_S \vec{j}\cdot\overrightarrow{dS}$ avec $\overrightarrow{dS} = r\,d\theta\,dr\,\overrightarrow{u_z}$ $I = \frac{2\pi\, j_0 R^2}{3}$ Pour $r > R$: $\overrightarrow{B_{ext}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\overrightarrow{u_\theta}$	
3	$\phi_{fil->spire} = \iint_S \overrightarrow{B_{fil}}\cdot\overrightarrow{dS_{spire}} = M\ I$ $\overrightarrow{dS} = dr\ dz\ \overrightarrow{u_\theta}$ $\phi_{fil->spire} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_{r_C-a/2}^{r_C+a/2}\frac{dr}{r}\int_0^a dz = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\ln\left(\frac{r_C + a/2}{r_C - a/2}\right)$ $M = \frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\left(\frac{r_C + a/2}{r_C - a/2}\right)$	

4	$\overrightarrow{m} = i\,a^2\,\overrightarrow{u_\theta}$ $\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{m}\wedge\overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$ Pas de couple de rotation, la spire est déjà dans une position de flux maximal $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{grad}\left(\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{B}\right)$ $\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{B} = i\,a^2\,\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ $\overrightarrow{F} = -\frac{\mu_0 I\; i a^2}{2\pi}\frac{1}{r^2}\overrightarrow{u_r}$ Force d'attraction	
5a	Pour milieu μ avec $\vec{j} = j_0\frac{r}{R}\vec{u_z}$: on obtient pour $r < R$ $\overrightarrow{B_{\text{int}}} = \frac{\mu\, j_0 r^2}{3R}\overrightarrow{u_\theta}$ (cf. q1) Pour milieu μ_0 avec $\vec{j} = j_0\frac{r}{R}\vec{u_z}$: on obtiendrait pour $r < R$ $\overrightarrow{B_0} = \frac{\mu_0\, j_0 r^2}{3R}\overrightarrow{u_\theta}$ Il faut ajouter $\vec{j_m} = \frac{\mu-\mu_0}{\mu_0} j_0\frac{r}{R}\vec{u_z}$ pour obtenir le $\overrightarrow{B_m} = \frac{\mu-\mu_0}{\mu_0}\frac{\mu_0 j_0 r^2}{3R}\overrightarrow{u_\theta}$ à l'intérieur et $\overrightarrow{B_{\text{int}}} = \overrightarrow{B_0} + \overrightarrow{B_m}$ $K = \frac{\mu-\mu_0}{\mu_0}$ Autre méthode : $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{B_{\text{int}}}\right) = \mu_0\left(\vec{j} + \overrightarrow{j_m}\right) = \mu_0\left(K+1\right) j_0\frac{r}{R}\overrightarrow{u_z}$ $\frac{1}{r}\frac{\partial\left(rB_{\text{int}}\right)}{\partial r} = \mu_0\left(K+1\right) j_0\frac{r}{R}$ $\overrightarrow{B_{\text{int}}} = \mu_0\left(K+1\right) j_0\frac{r^2}{3R}\overrightarrow{u_\theta}$ $\mu_0\left(K+1\right) = \mu$	
5b	On doit obtenir $\overrightarrow{B_{ext}} = \frac{\mu_0 j_0 R^2}{3r}\overrightarrow{u_\theta}$ (cf. q1) Pour milieu μ_0, la relation de passage sans courant surfacique s'écrirait $\overrightarrow{u_r}\wedge\left(\overrightarrow{B_{ext}}(R) - \overrightarrow{B_{\text{int}}}(R)\right) = \vec{0}$ ce qui amènerait $\overrightarrow{B_{ext}} = \frac{\mu\; j_0 R^2}{3r}\overrightarrow{u_\theta}$ On doit alors ajouter un courant surfacique d'aimantation $\overrightarrow{k_m}$ tel que $\overrightarrow{u_r}\wedge\left(\overrightarrow{B_{ext}}(R) - \overrightarrow{B_{\text{int}}}(R)\right) = \mu_0\overrightarrow{k_m}$ (calcul de $\overrightarrow{k_m}$ non demandé)	
6	Force de Lorentz initiale : $\overrightarrow{F} = q v_0\overrightarrow{u_r}\wedge B\left(r=R\right)\overrightarrow{u_\theta} = q v_0 B\left(R\right)\overrightarrow{u_z}$ ($v_0\overrightarrow{u_r}$: vitesse initiale) L'application du PFD amènerait une résolution débouchant sur une trajectoire dans le plan ($\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_z}$) Avec $q = -e < 0$: trajectoire vers le bas dans le plan ($\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_z}$) 	

Exercice 2		**3 pts**
1	Force de Laplace : $\overrightarrow{dF} = i\,\overrightarrow{d\ell} \wedge \overrightarrow{B} = i\left(-dr\,\overrightarrow{u_r}\right) \wedge B(r)\overrightarrow{u_\theta} = -i\;dr\;B(r)\overrightarrow{u_z}$  $\overrightarrow{F} = \int_{c}^{c+l} -\frac{\mu_0\,I\,i}{2\pi}\frac{dr}{r}\,\overrightarrow{u_z}$ $\overrightarrow{F} = -\frac{\mu_0\,I\,i}{2\pi}\ln\left(1+\frac{\ell}{c}\right)\overrightarrow{u_z}$	
2	Le segment va tourner autour de son point d'accroche (le milieu du fil) qui amènera le segment parallèle au fil avec le courant de sens opposé (courant vers le bas dans le segment). Le segment subira des forces de Laplace homogènement réparties (pour l'écarter) mais le fil ne peut pas se translater. Le moment de ces forces de Laplace est nul par rapport au point d’accroche (milieu su segment), le segment restera dans cette position. 	

Exercice 3		**6 pts**
1	$\vec{n} = \vec{u}_r$ $\vec{u}_z = \cos(\theta)\vec{u}_r - \sin(\theta)\vec{u}_\theta$ $\vec{k} = M\sin(\theta)\vec{u}_\varphi$	
2	Dessin des lignes de courants : cercles d'axe Oz, orientés suivant $\vec{u}_\varphi$ (du repère sphérique) Tout plan passant par l'axe Oz est plan d'antisymétrie de la distribution des courants et invariance par rotation autour de l'axe z suivant φ (du repère sphérique).	
3	$div(\vec{B}) = 0 \quad \vec{rot}(\vec{B}) = \vec{0}$ $\frac{\partial rB_\theta}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \theta} = 0$ $\frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 B_r}{\partial r} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial \sin(\theta) B_\theta}{\partial \theta} = 0$	
4	Continuité de la composante normale du champ magnétique suivant $\vec{u}_r$ $\frac{2\mu_0 M}{3}\cos(\theta) = 2\frac{D_2\cos(\theta)}{R^3}$ Discontinuité de la composante normale du champ magnétique $\vec{u}_r \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0\vec{k} = \mu_0 M\sin(\theta)\vec{u}_\varphi$ $\frac{D_2\sin(\theta)}{R^3} + \frac{2\mu_0 M}{3}\sin(\theta) = \mu_0 M\sin(\theta)$ $D_2 = \frac{\mu_0 M R^3}{3}$ Solution $B_{r,1}(\mathrm{r},\theta) = \frac{2\mu_0 M}{3}\cos(\theta) \qquad B_{\theta,1}(\mathrm{r},\theta) = -\frac{2\mu_0 M}{3}\sin(\theta)$ $B_{r,2}(\mathrm{r},\theta) = 2\frac{\mu_0 M R^3}{3r^3}\cos(\theta) \qquad B_{\theta,2}(\mathrm{r},\theta) = \frac{\mu_0 M R^3}{3r^3}\sin(\theta)$	